0.0.1. **Teorie CIU spočetně mnoha nezávislých unárních predikátů.**

Teorie CIU *spočetně mnoha nezávislých unárních predikátů* je v jazyce $L^{cU} = \langle U_i \rangle_{i<\omega}$ spočetně unárních predikátových symbolů s axiomy

$$(\exists x)(\bigwedge_{i\in s} U_i(x) \;\&\; \bigwedge_{j\in t} \neg U_j(x)), \quad s,t \subseteq \omega \text{ jsou konečné a disjunktní.}$$

Teorie CIU je zřejmě bezesporná a má jen nekonečné modely. Např. $\langle \mathbb{N} - \{0\}, P_i \rangle_{i<\omega} \models$ CIU, kde P_i je množina právě všech čísel z $\mathbb{N} - \{0\}$ dělitelných i-tým prvočíslem.

Pro $s,t \subseteq \omega$ konečné disjunktní označíme $\bigwedge_{i\in s} U_i(x) \;\&\; \bigwedge_{j\in t} \neg U_j(x)$ jako

$$\chi_{s,t}(x);$$

když $s = t = \emptyset$, jde o formuli $x = x$. Vidíme, že platí:

$$\text{otevřená } L^{cU}\text{-formule v } x \text{ je ekvivalentní disjunkci formulí tvaru } \chi_{s,t}(x),\ x \neq x. \tag{1}$$

TVRZENÍ 0.0.2.

1) *Je-li* $\mathcal{A} \models$ CIU, *je* $\chi_{s,t}(\mathcal{A})$ *nekonečné pro každé* $s,t \subseteq \omega$ *disjunktní konečné.*

2) CIU *má eliminaci kvantifikátorů a je tedy modelově kompletní. Dále je též kompletní.*

3) *Lindenbaumova algebra* B^1CIU *je bezatomární.*

Důsledky:

a) CIU *není atomická a nemá tedy ani prvomodel ani spočetný saturovaný model a ani algebraický prvomodel.*

b) *Pro* $\kappa \geq \omega$, $\mathcal{A} \models$ CIU, $X \subseteq A$ *a* $|X| \leq \kappa$ *je* $|\mathrm{S}^1(X, \mathcal{A})| \leq \kappa \Leftrightarrow \kappa \geq 2^\omega$.

Čili: CIU *je* κ*-stabilní, právě když* $\kappa \geq 2^\omega$.

4) *Každé konečné parciální vnoření modelu* $\mathcal{A} \models$ CIU *do sebe lze rozšířit do automorfizmu* $\mathcal{A}$, *tj. každý model teorie* CIU *je ultrahomogenní a tedy i* ω*-homogenní.*

Důkaz. 1) Sporem: vezměme $s,t \subseteq \omega$ disjunktní konečné s $|\chi_{s,t}(\mathcal{A})|$ nejmenším možným, $n \in \omega - (s \cup t)$. Pak $|\chi_{s\cup\{n\},t}(\mathcal{A})| < |\chi_{s,t}(\mathcal{A})|$ – spor.

2) Dokážeme 1-koexistenci CIU. Buď h konečné neprázdné parciální vnoření modelu $\mathcal{A} \models$ CIU do $\mathcal{B} \models$ CIU. Buď $\psi(x, \overline{y})$ elementární konjunkce s $n = \mathrm{l}(\overline{y})$ a nechť $a \in A$, $\overline{e} \in \mathrm{dom}(h)^n$ splňují $\mathcal{A} \models \psi[a, \overline{e}]$; hledáme $b \in B$ s $\mathcal{B} \models \psi[b, h\overline{e}]$. Můžeme předpokládat, že $\psi(x, \overline{y})$ je s jistými $s,t \subseteq \omega$ konečnými disjunktními a $u \subseteq n$ tvaru

$$\chi_{s,t} \;\&\; \bigwedge_{i\in u} x = y_i \;\&\; \bigwedge_{i\in n-u} x \neq y_i.$$

(Konjunkty neobsahující x nemusíme uvažovat.) Je-li $u \neq \emptyset$ a $i \in u$, je $b = h(a_i)$ hledané. Buď $u = \emptyset$. Pak existuje $b \in \chi_{s,t}(\mathcal{B}) - \mathrm{rng}(h)$ a to je hledané. Protože má CIU eliminaci kvantifikátorů, je modelově kompletní.

Dokážeme kompletnost CIU. Pro sentenci φ teorie CIU existuje $\varphi'(x)$ otevřená tak, že CIU $\vdash \varphi \leftrightarrow (\exists x)\varphi'(x)$. Dle (1) lze $\varphi'(x)$ vzít jako disjunkci formulí tvaru $\chi_{s,t}(x)$ nebo $x \neq x$. Tudíž $(\exists x)\varphi'(x)$ je dokazatelná nebo vyvratitelná v CIU.

3) B^1CIU je algebra izomorfní s $\mathrm{Df}^1(\emptyset, \mathcal{A})$ s $\mathcal{A} \models$ CIU. Její nenulový prvek je dle (1) sumou prvků tvaru $\chi_{s,t}(\mathcal{A})$; žádný takový prvek není atom, neboť $\emptyset \neq \chi_{s\cup\{i\},t}(\mathcal{A}) \subsetneq \chi_{s,t}(\mathcal{A})$ pro $i \in \omega - (s \cup t)$.

a) plyne ihned z 3). (Algebraický prvomodel by byl díky eliminaci kvantifikátorů prvomodlem.)

b) Pro nekonečné $\kappa < 2^\omega$ dle 3) je $|\mathrm{S}^1(\emptyset, \mathcal{A})| \geq 2^\omega$, tedy CIU není κ-stabilní. Buď $\kappa \geq 2^\omega$. Prvky $a, b \in A$ realizují týž kompletní 1-typ nad X v $\mathcal{A}$, právě když platí $a \sim_{X,A} b$, kde $a \sim_{X,A} b$ je definováno takto:

$$\mathcal{A} \models \chi[a, e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[b, e] \text{ pro každou atomickou } L^{cU}\text{-formuli } \chi(x, y) \text{ a } e \in X; \tag{2}$$

to plyne z eliminace kvantifikátorů teorie CIU. Je patrné, že ekvivalence $\sim_{X,A}$ na A má nejvýše κ faktorů; tedy uvažovaných 1-typů je nejvýše κ.

4) Buď f konečné parciální vnoření modelu $\mathcal{A}$ do sebe. Označme $X = \mathrm{dom}(f)$, $Y = \mathrm{rng}(f)$. *Sled* buď prostá sekvence $a_0, \ldots, a_n$ prvků z A taková, že $a_0 \in X - Y$, $a_n \in Y - X$, $f(a_i) = a_{i+1}$

pro $i < n$. Buď g rozšíření f a všechny dvojice $\langle a_n, a_0\rangle$, kde $a_0, \dots, a_n$ je nějaký sled. Pak to je prosté zobrazení $X \cup Y$ na $X \cup Y$ a jasně platí $U_i^A(a) \Leftrightarrow U_i^A(g(a))$ pro $a \in X \cup Y$, tj. je to parciální vnoření $\mathcal{A}$ do sebe. Identitou na $A - (X \cup Y)$ je rozšíříme do automorfizmu $\mathcal{A}$. □

TVRZENÍ 0.0.3.

1) *Pro* $\omega \le \kappa \le 2^\omega$ *je* 2^κ *neizomorfních modelů* CIU *kardinality* κ. *Pro* $\kappa > 2^\omega$ *je* $|\kappa \cap \mathbf{Cn}|^{2^\omega}$ *neizomorfních modelů* CIU *kardinality* κ. *Pro* $\kappa = \aleph_\alpha > 2^\omega$ *je* $|\kappa \cap \mathbf{Cn}|^{2^\omega} = |\alpha|^{2^\omega}$.
2) *Existuje kontinuum spočetných modelů* CIU *takových, že každý kompletní* 1*-typ teorie* CIU *je realizovaný nejvýše v jednom z nich.*

Důkaz. Buď $\mathcal{A}$ nějaká L^{cU}-struktura. Pro $I \subseteq \omega$ definujme

$$A_I = \bigcap_{i \in I} U_i^A \ \cap \ \bigcap_{j \notin I} (A - U_j^A).$$

Zřejmě dvě L^{cU}-struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou izomorfní, právě když pro každé $I \subseteq \omega$ mají množiny A_I, B_I stejnou mohutnost.

Množina $S \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ je *separující* (konečné podmnožiny), když pro každé dvě disjunktní konečné podmnožiny s, t přirozených čísel existuje $I \in S$ tak, že $s \subseteq I$ a $t \subseteq \omega - I$ (tj. I odděluje s, t).

L^{cU}-struktura $\mathcal{A}$ je zřejmě modelem teorie CIU, právě když je množina $S = \{I \subseteq \omega; A_I \neq \emptyset\}$ separující. Dále snadno sestrojíme spočetnou separující množinu a tedy i pro každé nekonečné $\kappa \le 2^\omega$ separující množinu kardinality κ.

Buď S separující a nechť $\{r_I; I \in S\}$ je disjunktní rozklad A. Definujme $U_i^A \subseteq A$ takto: $U_i^A = \{a \in A; (\exists I \in S)(i \in I \ \& \ a \in r_I\}$. Buď $\mathcal{A}^S = \mathcal{A} = \langle A, U_i^A\rangle_{i<\omega}$. Pak pro $I \in S$ je $A_I = r_I$ a tedy $\mathcal{A}$ je model teorie CIU a $S = \{I \subseteq \omega; A_I \neq \emptyset\}$.

1) Buď S separující, mohutnosti $\min(2^\omega, \kappa)$ pro $\kappa \ge \omega$, A mohutnosti κ a $\{r_I; I \in S\}$ rozklad A; ten určuje model $\mathcal{A}^S = \mathcal{A}$ teorie CIU. Je-li $\mathcal{A}'$ určen jiným rozkladem $\{r'_I; I \in S\}$ množiny A, jsou tyto modely izomorfní, právě když $|r_I| = |r'_I|$ platí pro každé $I \in S$. V tomto smyslu neekvivalentních rozkladů existuje $|\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}|^{|S|}$, kde $\mathbf{Cn}$ je třída kardinálních čísel. V případě $\kappa \le 2^\omega$ je zřejmě toto číslo rovno 2^κ, v případě $\kappa = \aleph_\alpha > 2^\omega$ je $|S| = 2^\omega$ a $|\aleph_{\alpha+1} \cap \mathbf{Cn}|^{2^\omega} = |\alpha + 1|^{2^\omega} = |\alpha|^{2^\omega}$.

2) Rekurzí přes 2^ω sestrojíme kontinuum disjunktních separujících množin S_i, $i < 2^\omega$. Buď $\mathcal{A}^i$ taková L^{cU}-struktura, že každé A_I^i pro $I \in S_i$ je jednoprvková a $A_I^i = \bigcup\{A_I^i;\ I \in S_i\}$; je $\mathcal{A}^i \models$ CIU. Realizuje-li kompletní 1-typ p prvek a v A^i, je $\{a\} = A_I^i$ pro jisté $I \in S^i$. Když $j \neq i$ a b realizuje p v $\mathcal{A}^j$, musí být $\{b\} = A_I^j$. Avšak $I \notin S^j$ a tedy p není realizováno v $\mathcal{A}^j$. □