1. Základní pojmy teorie míry

Motivace: Chceme zavést integrál, který je lepší než Riemannův nebo Newtonův. Klíčová je vlastnost f_k integrovatelné a $f_k \to f$ v nějakém smyslu, pak f je integrovatelná.

Při zavedení míry (=objem množiny) máme problém: Pro $n \geq 3$ neexistuje množinová funkce $\mu : \exp(\mathbf{R}^n) \to [0, \infty]$ s vlastnostmi

(1) pro všechny $A, B \subset \mathbf{R}^n,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
(2) pro všechny $A \subset \mathbf{R}^n$ a $x \in \mathbf{R}^n$ $\mu(A + x) = \mu(A)$,
(3) $\mu([0, 1]^n) = 1$.

Proto při konstrukci míry nebudeme umět určit míru všech podmnožin $\mathbf{R}^n$, ale pouze některých.

1.1. Množinové systémy, pojem míry

Nechť X je libovolná množina (například $\mathbf{R}^n$) a $\exp(X)$ značí systém všech podmnožin X.

Definice. Nechť $\mathcal{A} \subset \exp(X)$. Systém množin $\mathcal{A}$ se nazývá *σ-algebra*, pokud:

(1) $X \in \mathcal{A}$,
(2) $A \in \mathcal{A} \to X \setminus A \in \mathcal{A}$,
(3) $A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.

Dvojici $(X, \mathcal{A})$ nazýváme měřitelným prostorem.

Poznámka: Každá σ-algebra je uzavřená i na spočetné průniky, neboť $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}(X \setminus A_k)$.

Věta L 1.1 (Existence nejmenší σ-algebry)**.** *Nechť $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \exp(X)$ je libovolný systém podmnožin. Pak existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$. (Pozn: Nejmenší vzhledem k inkluzi)*

Důkaz. Víme, že existuje σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$ (např. $\exp X$). Označíme $\tau =$ průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{S}$. Snadno ověříme, že je τ σ-algebra a zároveň víme, že je nejmenší (tu nejmenší obsahuje). $\square$

Poznámka Tuto σ-algebru označíme **σ-obal** $\mathcal{S}$ a značíme $\tau = \sigma(\mathcal{S})$

Definice. Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *otevřená*, pokud pro každé $x \in A$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset A$. Označme $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ množinu všech otevřených podmnožin $\mathbf{R}^n$. (geöfnett)

Připomeňme, že systém otevřených množin splňuje

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{G}(X)$, (2) $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{G}(X) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{G}(X)$,
(3) $U_\alpha \in \mathcal{G}(X)$ pro všechna $\alpha \in A$ (libovolný systém) $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{G}(X)$.

Definice. Nechť X je množina a $\tau \subset \exp(X)$. Systém τ nazveme *topologií*, jestliže

$$(1)\ \emptyset, X \in \tau, \quad (2)\ U_1, \dots, U_k \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tau,$$

$$(3)\ U_\alpha \in \tau \text{ pro všechna } \alpha \in A \text{ (libovolný systém)} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau.$$

Dvojice (X, τ) se nazývá topologický prostor a množiny z τ nazýváme otevřené množiny.

Poznámka: Každý metrický prostor je topologický prostor s $\tau = \mathcal{G}(X)$.

Definice. *Borelovské* množiny tvoří nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny, tedy $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G}(X))$.

Příklad: Nechť $a \leq b$, pak $[a, b]$ a $[a, b)$ jsou borelovské podmnožiny $\mathbf{R}$. Dají se totiž napsat jako $[a, b] = \mathbf{R} \setminus \big((-\infty, a) \cup (b, \infty)\big)$ a $[a, b) = [a, \frac{a+b}{2}] \cup (a, b)$.

Příklad: G.. otevřené množiny, $F..X \backslash G$ .. uzavřené množiny.
G_δ.. spočetné průniky otevřených množin
F_σ.. spočetná sjednocení uzavřených množin
$G_{\delta\sigma}$.. spočetné sjednocení spočetného průniku otevřených
$F_{\sigma\delta}, G_{\delta\sigma\delta}$. vždy něco příbývá při každé operaci
Pozn: $\mathbb{Q} \in F_\delta$ - jednobodové spočetné sjednocení. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \in G_\delta$, $\mathbb{Q} \notin G_\delta$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud není identicky rovna ∞ a je σ-aditivní, tedy

$$A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbf{N},\ \text{jsou po dvou disjunktní, pak } \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou. Je-li $\mu(X) = 1$, μ se nazývá pravděpodobnostní míra a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ pravděpodobnostní prostor.

Poznámka: Snadno si můžeme rozmyslet, že z definice plyne
a) $\mu(\emptyset) = 0$ - volme $A_k = \emptyset$ pro všechna k
b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktní - volme $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_k = \emptyset$ pro $k \geq 3$
c) $\mu(A) \leq \mu(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ - z b) víme $\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$ a $\mu(B \setminus A) \geq 0$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že μ je *úplná* míra, pokud

pro všechna $A \in \mathcal{A}$ s $\mu(A) = 0$ a všechna $A' \subset A$ platí $A' \in \mathcal{A}$ (a tedy $\mu(A') = 0$).

Příklady: 1. Na $\mathbf{R}$ můžeme definovat Diracovu míru v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ jako

$$\mu(A) = 1, \text{ pokud } x_0 \in A \text{ a } \mu(A) = 0, \text{ pokud } x_0 \notin A.$$

2. Na $\mathbf{N}$ můžeme definovat takzvanou sčítací míru předpisem

$$\mu(S) = \text{počet prvků množiny } S.$$

Snadno ověříme z definice, že toto jsou skutečně míry.

Věta L 1.2 (Zúplnění míry)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou. Nechť* $\mathcal{A}_0$ *je systém všech množin* $E \subset X$*, pro něž existují* $A, B \in \mathcal{A}$ *tak, že* $A \subset E \subset B$ *a* $\mu(B \setminus A) = 0$*. Potom* $\mathcal{A}_0$ *je* σ*-algebra obsahující* $\mathcal{A}$*.*

Definujme $\mu_0(E) = \mu(A)$*. Potom* $\mu = \mu_0$ *na* $\mathcal{A}$ *a* $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ *je prostor s úplnou mírou.*

Důkaz. $\mathcal{A}_0$ **je σ-algebra: (1)** $X \subset E \subset X$ **(2)** $D \in \mathcal{A}_o$, tedy $\exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset D \subset B$, tedy $X \backslash B \subset X \backslash D \subset X \backslash A$, protože[1] $\mu(B \backslash A) = 0 \implies \mu((X \backslash A) \backslash (X \backslash B)) = 0 \implies X \backslash D \in \mathcal{A}_0$ **(3)** stejná opičárna, $A_i \subset E_i \subset B_i \implies \bigcup A_i \subset \bigcup E_i \subset \bigcup B_i, \mu(\bigcup B_i \backslash \bigcup A_i) \leq \mu(\bigcup B_i \backslash A_i) = 0$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$: .. $A \in \mathcal{A} : \ A \subset A \subset A$.. jasné

μ_0 **je dobře definovaná (jednoznačná)**: Pro spor budeme předpokládat, že existují nějaké $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tak, že $A_1 \subset E \subset B_1,\ \mu(B_1 \backslash A_1) = 0$ a analogicky $A_2 \subset E \subset B_2,\ \mu(B_2 \backslash A_2) = 0$. Z toho ale plyne $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Díky těmto pozorováním:

Pozorování: $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (Dk: $\mu(A) + \mu(B \backslash A) = \mu(B)$)
Pozorování: $\mu(B \backslash A) = 0 \implies \mu(A) = \mu(B)$ (Dk: $\mu(A) + \mu(B \backslash A) = \mu(B)$)
Protože $A_1 \subset B_2$ a tedy $\mu(A_1) \leq \mu(B_2) = \mu(A_2)$ a analogicky opačně.

μ_0 **je míra**: σ-aditivita: Nechť $E_k \in \mathcal{A}_0$ po 2 diskujktní. Pak existují $A_k \subset E_k \subset B_k,\ \mu(B_k \backslash A_k) = 0$, tedy $\bigcup A_k \subset \bigcup E_k \subset \bigcup B_k$, tedy $\bigcup E_k \in \mathcal{A}_0$ neboť $\mu\left(\bigcup B_k \backslash \bigcup A_k\right) \leq \sum \mu(B_k \backslash A_k) = 0$ a

$$\mu_0\left(\bigcup E_k\right) = \mu\left(\bigcup A_k\right) \stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$$

* díky σ-aditivitě a faktu, že A_k jsou také po 2 disjunktní ($A_k \subset E_k$)

μ_0 **je úplná**: Nechť $A \in \mathcal{A}_0,\ \mu_0(A) = 0$. Pak $\exists \tilde{A} \subset A \subset \tilde{B},\ \mu(\tilde{B}) = \mu(\tilde{A}) = 0$. Nechť $A' \subset A$, pak $\emptyset \subset A' \subset \tilde{B}$ a $\mu(\tilde{B}) - \mu(\emptyset) = 0 \implies A' \in \mathcal{A}_0$ □

Konec 1. přednášky

Věta L 1.3 (Spojitost míry)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou. Potom*

$$(1)\ A_k \in \mathcal{A},\ A_k \nearrow A \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A),$$

$$(2)\ A_k \in \mathcal{A},\ A_k \searrow A,\ \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

Důkaz. **(1) Trik zdisjunktnění**: označme $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \backslash A_1,\ B_3 = A_3 \backslash A_2$. Pak máme po dvou disjuktní B_k a tedy

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{j} \mu(B_k) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$$

(2) Označme $A'_k = A_1 \backslash A_k$, pak $A'_k \nearrow A_1 \backslash A$. Podle (1) máme

$$\mu(A_1 \backslash A_k) = \mu(A'_k) \to \mu(A_1 \backslash A)$$

ale to se rovná

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) \to \mu(A_1) - \mu(A)$$

[1]Hezky rigorózně: $B \backslash A = B \cap A^C = A^C \cap B = A^C \backslash B^C = (X \backslash A) \backslash (X \backslash B)$

(Díky jednoduchému **pozorování** $\mu(A) + \mu(A_1 \backslash A) = \mu(A_1)$) $\square$

Příklad (Význam druhého předpokladu): Uvažme $A_k = [k, \infty)$ $A_k \searrow \emptyset$ potom $\lim \mu(A_k) = \lim \infty \neq \mu(\emptyset)$

Definice. Nechť $a = [a_1, \dots, a_n],\ b = [b_1, \dots, b_n] \in \mathbf{R}^n$. Množinu

$$W = \{x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n :\ a_i < x_i < b_i \text{ pro všechna } i = 1, \dots, n\}$$

(a také každou množinu, která vnikne záměnou libovolného $<$ za $\leq$) nazveme *n-buňka*. Objem n-buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$ a jako $\mathrm{vol}(W) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$ jinak.

Věta T 1.4 (Rozšíření elementárního objemu)**.** *Existuje právě jedna míra $\mathcal{L}_n$ na $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ taková, že pro každou n-buňku W platí $\mathcal{L}_n(W) = \mathrm{vol}(W)$.*

Důkaz. Jen myšlenka: definujeme

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\sum \mathrm{vol}\ I_j,\ I_j \text{n-buňky},\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\}$$

A ono to vyjde :-) $\square$

Poznámka: Tato míra $\mathcal{L}_n$ je invariantní vůči posunutí - pro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ platí $\mathcal{L}_n(x + A) = \mathcal{L}_n(A)$.

Poznámka: $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$. $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{q_i\}$ Nechť $\varepsilon > 0,\ \mathbb{Q} \subset \bigcup^{\infty}(q_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^i})$, $\sum \mathrm{vol}\ (I_i) = \sum \frac{2\varepsilon}{2^i} = 2\varepsilon$, tedy $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) < 2\varepsilon\ \forall\varepsilon \implies \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$

Definice. Zúplnění σ-algebry $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ vzhledem k $\mathcal{L}_n$ označíme $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$. Pro rozšíření míry $\mathcal{L}_n$ na σ-algebru $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$ používáme stejné značení $\mathcal{L}_n$. Toto rozšíření nazýváme *Lebesgueova míra* a $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$ nazýváme σ-algebru *Lebesgueovsky měřitelných* množin.

1.2. Měřitelné funkce

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a (Y, τ) topologický prostor. Říkáme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné*, jesliže $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou.

Je-li $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ množina všech borelovských množin, pak zobrazení f nazýváme *borelovské* (místo měřitelné).

Poznámka: Připomeňme, že zobrazení mezi dvěma topologickými prostory $g : X \to Y$ je spojité, pokud $g^{-1}(V)$ je otevřená v X pro každou $V \subset Y$ otevřenou. Měřitelnost lze tedy vidět jako takové zobecnění spojitosti a také tedy spojitost implikuje měřitelnost.

Lemma 1.5. *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, potom charakteristická funkce množiny*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases}$$

je měřitelná právě tehdy, když $A \in \mathcal{A}$.

Důkaz. Nechť je A měřitelná, vzory otevřených množin v $\mathbb{R}$ mohou být $\emptyset, A, X \backslash A, X \implies \chi_A$ je měřitelná.
Nechť χ je měřitelná, pak $(\chi_A)^{-1}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = A$, tedy $A \in \mathcal{A}$ (měřitelná) $\square$

Věta L 1.6 (Měřitelnost složeného zobrazení)**.** *Nechť Y, Z jsou topologické prostory a $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Nechť $g : Y \to Z$ je spojité a $f : X \to Y$ je měřitelné zobrazení. Potom $g \circ f$ je měřitelné zobrazení.*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Důkaz. Označme $h = g \circ f$. Chceme dokázat, že $h^{-1}(V) \in \mathcal{A} \ \ \forall\ V \subset Z$ otevřené. Máme ale $h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ ale $g^{-1}(V)$ je otevřená v Y ze spojitosti g a vzor otevřené v Y je při měřitelném f měřitelný (leží v $\mathcal{A}$) $\square$

Věta L 1.7 (Měřitelnost složeného zobrazení v $\mathbf{R}^2$)**.** *Nechť $u, v : X \to \mathbf{R}$ jsou reálné měřitelné funkce na $(X, \mathcal{A})$. Nechť Y je topologický prostor a $\Phi : \mathbf{R}^2 \to Y$ je spojité zobrazení. Definujme $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$, pak $h : X \to Y$ je měřitelné zobrazení.*

Důkaz. Označme $g : X \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = (u(x), v(x))$. Pak $h = \Phi \circ g$ a Φ je spojité. Podle předchozí věty stačí ukázat, že g je měřitelné, tedy chceme $g^{-1}(V) \in \mathcal{A} \ \forall\ V$ otevřené.
Nejprive pro speciální $V = U_1 \times U_2$ kde U_1, U_2 jsou otevřené v $\mathbb{R}$. $g^{-1}(U_1 \times U_2) = \underbrace{u^{-1}(U_1)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{v^{-1}(U_2)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.
Každá otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^2$ lze ale napsat jako $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times J_k$ kde I_k, J_k jsou otev. intervaly v $\mathbb{R}$. Nyní

$$g^{-1}(V) = g^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times J_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} g^{-1}(I_k \times J_k) \in \mathcal{A}$$

(měřitelnost plyne z předchozího kroku) $\square$

Důsledek: Nechť $f, g : X \to \mathbf{R}$ jsou měřitelné, pak $f + g$ a fg jsou měřitelné. Stačí použít předchozí větu na $u = f$, $v = g$, $\Phi_1(x, y) = x + y$ a $\Phi_2(x, y) = xy$.
Konec 2. přednášky

Věta T 1.8 (Vlastnosti měřitelných funkcí)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, Y topologický prostor a $f : X \to Y$.*
a) Je-li $\mathcal{M}$ systém všech množin $A \subset Y$, pro něž je $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, potom $\mathcal{M}$ je σ-algebra.
b) Je-li f měřitelná, $B \subset Y$ borelovská, potom $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
c) Je-li $Y = [-\infty, \infty]$, pak f je měřitelná právě tehdy, když $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ pro všechna $\alpha \in [-\infty, \infty]$.
d) Je-li f měřitelná, Z topologický prostor a $g : Y \to Z$ borelovská, pak $g \circ f$ je měřitelná.

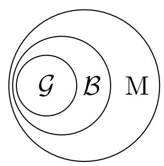
$$X \xrightarrow{\text{měřitelná}} Y \xrightarrow{\text{borelovská}} Z$$

Důkaz. a) (1) $Y \in M : f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ (2) $A \in M \implies f^{-1}(Y \backslash A) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(A) = X \backslash f^{-1}(A) \implies Y \backslash A \in M$ (3) $f^{-1}(\bigcup A_n) = \bigcup f^{-1}(A_n)$ etc.
b) Označme M všechny množiny v Y takové, že $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. f je měřitelná $\implies \mathcal{G}(Y) \subset M$. Zároveň ale z předchozího bodu víme, že M je σ-algebra $\implies \sigma(\mathcal{G}(Y)) \subset M$, a to jsou Borelovské množiny.
c) ($\Leftarrow$) Označme M množiny v Y takové, že $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Dle a) je M σ-algebra a

dle předpokladu dostáváme $(\alpha,\infty] \in M \quad \forall\alpha$. Chceme dostat, že v M leží všechny otevřené množiny.
Nechť $B_k \in \mathbb{R}$, $B_k \nearrow \beta$, $[-\infty,\beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[-\infty,\infty]\setminus(B_k,\infty]$. Tedy i $(\alpha,\beta) = [-\infty,\beta) \cap (\alpha,\infty] \in M$
Libovolná otevřená množina v $\mathbb{R}$ je spočetné sjednocení otevřených intervalů a tedy $\in M$.
($\Rightarrow$) Pro rozšířená reálná čísla a adekvátní topologii[2] je $(\alpha,\infty]$ otevřená množina a tedy je tvrzení zřejmé.
d) Označme $h(x) = g(f(x))$. Chceme $h^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \forall A$ otevřené v Z. $h^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, g borelovská $\Rightarrow g^{-1}(A)$ je borelovská v Y a dle b) f^{-1}(borelovská) $\in \mathcal{A}$

□

Příklad: Vzor měřitelné množiny nemusí být měřitelná - Cantorova stupňovitá funkce. (possibly někdy doplnit)



Poznámka: V pravděpodobnosti je Cantorova fce důležitá - každá (hustota) se dá rozepsat na krásnou funkci, funkci skoků a Cantor-like funkci.

Připomeňme, že

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \inf_k b_k, \quad b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$$

Věta L 1.9 (Měřitelnost a limitní přechod)**.** *Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $f_k : X \to [-\infty,\infty]$ jsou měřitelné. Definujme $g = sup_{k\in\mathbf{N}} f_k$ a $f = \limsup_{k\to\infty} f_k$. Potom f a g jsou měřitelné funkce.*

Důkaz. Podle V1.8 c) stačí ukázat, že vzor $g^{-1}((\alpha,\infty]) \in \mathcal{A} \ \forall\alpha$. Z definice suprema ale plyne $g^{-1}((\alpha,\infty]) \overset{*}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((\alpha,\infty]) \in \mathcal{A}$

($*$) ($\subset$): Nechť $x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$, tedy $g(x) > \alpha$, tedy $\exists k : f_k(x) > \alpha \Rightarrow x \in f_k^{-1}((\alpha,\infty]) \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}$
($\supset$): $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((\alpha,\infty]) \Rightarrow \exists k : x \in f_k^{-1}((\alpha,\infty]) \Rightarrow f_k(x) > \alpha \Rightarrow g(x) > \alpha \Rightarrow x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$.

Tedy $g(X)$ je měřitelné. Analogicky $\inf\{f_k\} = -\sup\{-f_k\}$ je měřitelná. Tedy $h_k(x) = \sup\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots\}$ je měřitelná $\forall k$ a $f(x) = \inf_k h(x)$ je měřitelná.

□

Poznámka: a) Analogické tvrzení platí i pro inf a lim inf. (z důkazu)
b) Limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná funkce. (když se lim sup a lim inf rovnají)
c) $\max(f,g)$ a $\min(f,g)$ jsou měritelné funkce pro f,g měřitelné. (vezmeme $\{f,g,f,g,\dots\}$)

Definice. Nechť X je množina a $s : X \to [-\infty,\infty]$ je funkce. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, , když $s(X)$ je konečná podmnožina $[0,\infty)$.

[2] str. 11 v `http://math.rice.edu/~semmes/math443.pdf`

Tato funkce lze zapsat ve tvaru $s(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, kde $\alpha_i \in [0,\infty)$ a A_i jsou po dvou disjunktní množiny.

Není obtížné ukázat, že s je měřitelná právě tehdy, když všechny A_i jsou měřitelné. (A_i měřitelná $\iff$ χ_{A_i} měřitelná, vynásobení, součet)

Příklad: Dirichletova funkce je jednoduchá

Věta L 1.10 (Aproximace jednoduchými funkcemi)**.** *Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $f : X \to [0,\infty]$ je měřitelná funkce. Pak existují s_k jednoduché měřitelné tak, že $s_k \nearrow f$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ se rozdělí $[0,k)$ na

$$E_{i,k} = \Big[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\Big),\ i = 1,\dots,k\cdot 2^k \text{ a } F_k = [k,\infty)$$

Množiny $f^{-1}(E_{i,k})$ a $f^{-1}(F_k)$ jsou měřitelné, neboť f je měřitelné a $E_{i,k}, F_k$ jsou borelovské množiny. Definujme

$$s_k = \sum_{i=1}^{k\cdot 2^k} \frac{i-1}{2^k} \chi_{f^{-1}(E_{i,k})} + k\chi_{f^{-1}(F_k)}$$

Zřejmě je $s_k(x)$ jednoduchá a měřitelná. Snadno nahlédneme, že $s_{k+1}(x) \geq s_k(x)$

Tvrdím, že $s_k(x) \nearrow f(x)$. Pokud $f(x) = \infty$, pak $s_k(x) = k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, pokud $f(x) < \infty$, pak pro $k > f(x)$ platí $f(x) - s_k(x) \leq \frac{1}{2^k}$ a zjevně $f(x) \geq s_k(x)$, tedy $s_k(x) \nearrow f(x)$. □

Důsledek: Součet a součin měřitelných funkcí do $[0,\infty]$ jsou měřitelné funkce.

Důkaz. Dle věty $\exists\, s_k \nearrow f$ a $t_k \nearrow g$ jednoduché měřitelná, pak $s_k + t_k \nearrow f + g$ a dle věty 1.9. je $f + g$ měřitelná. □

Důsledek: Jsou-li $f, g : X \to \mathbf{R}$ měřitelné, pak množiny

$$\{f < g\} = \{x \in X :\ f(x) < g(x)\},\ \{f \leq g\},\ \{f = g\},\ \{f \neq g\}$$

jsou měřitelné. (**Důkaz**: $\{x \in X,\ f(x) - g(x) < 0\} = (f-g)^{-1}([-\infty, 0))$

Příklad: a) $\mathcal{L}^n$ b) Diracova míra: $X = \mathbb{B}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_{x_0}(A) = 1$ pokud $x_0 \in A$ jinak 0. c) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \exp \mathbb{N}$ a $\mu(S) = \#S$.

Konec 3. přednášky

2. Konstrukce integrálu

2.1. Definice abstraktního integrálu

Aritmetika v $[0,\infty]$: Domluvme se, že pro všechna $a \in [0,\infty]$ máme $a + \infty = \infty$ a pro $a > 0$ dále $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$. Navíc definujme $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce. Pro $E \in \mathcal{A}$ defunujeme

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Pro $f : X \to [0,\infty]$ měřitelnou definujeme *(abstraktní) Lebesgueův integrál*

$$\int_E f\ \mu = \sup\Big\{\int_E s\, d\mu :\ 0 \leq s \leq f,\ s \text{ je jednoduchá měřitelná}\Big\}.$$

Poznámka: Definice je korektní, "$\int_E s\, d\mu = \int_E s\, d\mu$"

Příklad a) $\int_{\mathbb{R}} D(x) = 0$ kde $D(x)$ je Dirichlet. b) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_{x_0}(x) = f(x_0)$

Věta L 2.1 (Vlastnosti abstraktního integrálu)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f, g : X \to [0, \infty]$. Potom pro $E \in \mathcal{A}$ platí:*
a) Je-li $f \leq g$ na X, pak $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.
b) Pro $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subset B$ platí $\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu$.
c) Pro $c \in [0, \infty]$ platí $\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu$
d) Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in E$, pak $\int_E f\, d\mu = 0$ (i pro $\mu(E) = \infty$).
e) Je-li $\mu(E) = 0$, pak $\int_E f\, d\mu = 0$ (i pro $f = \infty$ na E).
f) $\int_E f\, d\mu = \int_X f\chi_E\, d\mu$.
g) (Čebyševova nerovnost) Nechť $\alpha, c \in (0, \infty)$, potom

$$\mu\big(\{x \in X;\ f(x) \geq c\}\big) \leq \frac{1}{c^\alpha} \int_X f^\alpha\, d\mu.$$

h) Je-li $\int_X f\, d\mu < \infty$ a $N = \{f = \infty\}$, pak $\mu(N) = 0$.

Důkaz. a)-f) z definice
g) Chceme, že f^α je měřitelná. Nechť $E = \{f = 0\}$ pak

$$f(x) = \exp(\alpha \log(f(x) + \chi_E(x))\chi_{X\setminus E}(x)$$

$$\int\limits_X f^\alpha\, d\mu \overset{(b)}{\geq} \int\limits_{\{f\geq c\}} f^\alpha\, d\mu \overset{(a)}{\geq} \int\limits_{\{f\geq c\}} c^\alpha\, d\mu = c^\alpha \int\limits_{\{f\geq c\}} 1\, d\mu = c^\alpha \mu(\{f \geq c\})$$

h) Nechť $E_j = \{f > j\}$, pak E_j je měřitelná a $N \subset E_j$. Z Čebyševovy nerovnosti pro $\alpha = 1$ dostaneme $\mu(E_j) \leq \frac{1}{j} \int\limits_X f\, d\mu$. Tedy $\mu(N) \leq \frac{1}{j}$konstanta $\forall j \Rightarrow \mu(N) = 0$ $\square$

Věta L 2.2 (Linearita integrálu pro jednoduché funkce)**.** *Nechť s, t jsou jednoduché měřitelné funkce a definujme $\nu(E) = \int_E s\, d\mu$. Potom ν je míra a platí*

$$\int_X (s + t)\, d\mu = \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu.$$

Důkaz. Nejprve, že ν je míra. Identické ∞: $\nu(\emptyset) = \int\limits_\emptyset s\, d\mu = \sum \alpha_i \cdot 0 = 0$
σ-aditivita: Nechť $E_j,\ j = 1, \ldots$ jsou po dvou disjunktní a $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$

$$\nu(E) = \int\limits_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu\left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_i \cap E_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{j=1}^\infty \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} s\, d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(E_j)$$

Linearita integrálu: $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$, $t = \sum \beta_j \chi_{B_j}$, A_i po dvou disjukntní, B_i po dvou disjuktní. Zároveň obě pokrývají celé X (kdyžtak jsou přidány nuly).

$$\begin{aligned}\int_X (s+t)\,d\mu &= \int_X \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(\alpha_i+\beta_j)\chi_{A_i\cap B_j}\,d\mu = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sum_{j=1}^{l}\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^{k}\beta_j\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\alpha\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{l}\mu(B_j) = \int_X s\,d\mu + \int_X f\,d\mu\end{aligned}$$

□

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1,41 + 1,73 = 3,14 = \pi$$

2.2. Leviho a Lebesgueova věta

Budeme chtít zjistit, kdy lze prohodit limitu a integrál.

Protipříklad: $f_k(x) = k\cdot\chi_{(0,\frac{1}{k})}(x)$, pak $f_k(x) \overset{k\to\infty}{\to} 0$, ale $\lim\int f_k = 1 \neq 0 = \int \lim f_k$

Věta T 2.3 (Leviho věta). *Nechť $f_k : X \to [0,\infty]$ jsou měřitelné funkce a $f_k \nearrow f$. Pak f je měřitelná a*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu.$$

Důkaz. Z věty 1.9. víme, že f je měřitelná.
Dále $f_{k+1} \geq f_k \Rightarrow \int f_{k+1}\,d\mu \geq \int f_k\,d\mu$. Máme neklesající posloupnost reálných čísel a tedy $\exists \alpha = \lim_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu$. Z $f_k \leq f$ plyne $\int f_k \leq \int f$ a tedy $\alpha \leq \int_X f\,d\mu$

Nyní chceme dokázat, že $\alpha \geq \int_X f\,d\mu$. Nechť proto $0 \leq s \leq f$ je jednoduchá měřitelná funkce a nechť $c \in (0,1)$. Označme $E_k = \{f_k \geq c\cdot s\}$. Tvrdím, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = X$
Je-li $f(x) = 0$, pak $f_k(x) = 0\ \ \forall k$ a $x \in E_1$
Je-li $f(x) > 0$, pak $f(x) > cs(x)$, tedy $\exists k_0\ \forall k \geq k_0 : f_k(x) > cs(x)$, tedy $x \in E_{k_0}$
Z $f_{k+1} \geq f_k$ plyne $E_{k+1} \supset E_k$ a z V 2.2. víme $\nu(E) = \int_E s\,d\mu$ je míra. Tedy $\mu(X) = \lim_{k\to\infty}\mu(E_k)$ (V.1.3.)
Nyní

$$\int_X f_k\,d\mu \geq \int_{E_k} f_k\,d\mu \geq \int_{E_k} cs\,d\mu = c\int_{E_k} s\,d\mu = c\nu(E_k)$$

Tedy

$$\alpha = \lim_{k\to\infty}\int f_k\,d\mu \geq c\lim_{k\to\infty}\nu(E_k) = c\cdot\nu(X) = c\cdot\int_X s\,d\mu$$

Toto platí $\forall c \in (0,1)$ a tedy $\alpha \geq \int_X s\,d\mu$.
Tedy i $\alpha \geq \sup\{\int_X s\,d\mu;\ 0 \leq s \leq f,\ s \text{ jednoduchá, měřitelná}\} = \int_X f\,d\mu$

Tedy $\lim\int f_k = \int f$ □

Věta L 2.4 (Leviho věta pro řady)**.** *Nechť $f_k : X \to [0,\infty]$ jsou měřitelné funkce. Potom*

$$\int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Důkaz. Nejprve
Lemma: $\int_X (f_1+f_2)\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu + \int_X f_2\, d\mu$
Dk: $\exists s_k, t_k$ jednoduché měřitelné takové, že $s_k \nearrow f_1$ a $t_k \nearrow f_2$ (V 1.10)

$$\int_X (f_1+f_2)\, d\mu = \int_X \lim(s_k+t_k)\, d\mu \overset{\text{LEVI}}{=} \lim \int_X (s_k+t_k)\, d\mu \overset{\text{V 2.2.}}{=} \lim \int_X s_k + \int_X t_k$$
$$\overset{\text{LEVI}}{=} \int_X f_1 + \int_X f_2$$

Matematickou indukcí dokážeme (easy)

$$\int_X \sum_{k=1}^{j} f_k = \sum_{k=1}^{j} \int_X f_k$$

Nyní si definujme $g_j(x) = \sum_{k=1}^{j} f_k(x)$. Tyto funkce jsou měřitelné (konečný součet měřitelných), nezáporné a $g_j \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$
Podle Leviho věty

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X g_j(x)\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{j} f_k(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k(x)\, d\mu$$

□

Poznámka: (Použití Leviho) $X = \mathbb{N}$, $\mu =$ sčítací míra. Dokážeme, že

$$a_{jk} \geq 0 \implies \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$$

Zvolíme $f_k(j) = a_{jk}$, $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a

$$\int_{\mathbb{N}} f_k(j)\, d\mu(j) = \sum_{j=1}^{\infty} f_k(j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$$

Pak

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(j)\right)\, d\mu(j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\ ,\ \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_k(j)\, d\mu(j) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$$

Konec 4. přednášky

Věta L 2.5 (Fatouovo lemma)**.** *Nechť $f_k : X \to [0,\infty]$ jsou měřitelné funkce. Potom*

$$\int_X (\liminf_{k\to\infty} f_k)\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Důkaz. Označme $g_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\}$, pak $g_k \nearrow \liminf f_k$ (z V1.9. jsou g_k měřitelné)
Dle Leviho věty

$$\int_X g_k\, d\mu \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \liminf_{k\to\infty} f_k\, d\mu$$

Zřejmě $g_k \leq f_k$, tedy $\int_X g_k\, d\mu \leq \int_X f_k\, d\mu$ a z toho už plyne

$$\int_X \liminf f_k \, d\mu \overset{\text{Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \overset{\text{nekles}}{=} \liminf_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu$$

$\square$

Příklad: $f_k = k\chi_{(0,\frac{1}{k})} \to 0 =: f_k$

$$\int \liminf f_k = \int 0 = 0 \le \liminf \int f_k = \lim 1 = 1$$

2.3. Linearita integrálu

Definice. Označme $L^1(X,\mu)$ množinu všech měřitelných funkcí $f : X \to [-\infty, \infty]$ pro něž $\int_X |f| < \infty$. Pro funkce z $L^1(X,\mu)$ definujeme *(abstraktní) Lebesgueův integrál* jako

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Tyto funkce nazýváme Lebesgueovsky integrovatelné funkce.

Poznámka: Z definice triviálně plyne, že je-li f Lebesgueovsky integrovatelná, je i $|f|$ Lebesgueovsky integrovatelná. Tedy Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní. Tuto vlastnost nemá Newtonův integrál. (ale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, d\mu = \infty - \infty$:( )

Lemma 2.6. *Nechť $f \in L^1(X,\mu)$. Pak*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f| \, d\mu.$$

Důkaz.

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right| \overset{\triangle}{\le} \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu$$

$\square$

Věta L 2.7 (Linearita integrálu)**.** *Nechť $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ a $f,\ g \in L^1(X,\mu)$. Pak $\alpha f + \beta g \in L^1(X,\mu)$ a*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

Důkaz. Nejprve pro $\alpha = \beta = 1$. Označme $h = f + g$ (je měřitelná), tedy $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. Tedy máme $h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$. Z důkazu Leviho pro $\sum$ máme $\int f + g = \int f + \int g$ pro nezáporné, a to tu máme, tedy $\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$. Jelikož jsou tato čísla konečná ($\int h^+ \le \int |f| + \int |g| < \infty$), máme

$$\int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$$

Z věty 2.1. c) víme, že pro $\alpha \ge 0,\ f \ge 0$ máme $\int \alpha \cdot f = \alpha \int f$
Obecně pro $\alpha \ge 0$ je $\int \alpha f = \int \alpha f^+ - \int \alpha f^- = \alpha \int f$
Dále snadno[3] $\int -f = -\int f$ a tedy $\forall x \ \ \forall f \in L^1 : \int \alpha f = \alpha \int f$ $\square$

[3] $\int -f = \int f^- - f^+ = \int f^- - \int f^+ = -(\int f^+ + \int f^-) = -\int f$

Věta T 2.8 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť* $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ *jsou měřitelné funkce a* $f = \lim_{k\to\infty} f_k$. *Nechť dále existuje* $g \in L^1(X, \mu)$ *tak, že* $|f_k(x)| \le g(x)$ *pro všechna* $k \in \mathbf{N}$ *a* $x \in X$. *Potom*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f| \, d\mu = 0 \qquad a \qquad \int_X f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Důkaz. Zřejmě $|f_k(x) - f(x)| \le |f_k(x)| + |f(x)| \le 2g(x)$. Označme si pomocnou funkci $g_k(x) = 2g(x) - |f_k(x) - f(x)|$. Pak g_k jsou měřitelné a $g_k \ge 0$ (z nerovností výše). Dle Fatouova Lemmatu:

$$\int_X \underbrace{\liminf_{k\to\infty} g_k(x)}_{=2g(x) \text{ díky } f_k \to f} \le \liminf_{k\to\infty} \int_X g_k(x)$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\int_X 2g(x) \, d\mu(x) &\le \liminf_{k\to\infty} \int_X (2g(x) - |f_k(x) - f(x)|) \, d\mu(x) \\
&\overset{\text{V 2.7.}}{=} \liminf_{k\to\infty} \left(\int_X 2g(x) \, d\mu - \int_X |f_k(x) - f(x)| \, d\mu \right) \\
&= \int_X 2g(x) \, d\mu + \liminf_{k\to\infty} \left(- \int_X |f_k(x) - f(x)| \, d\mu \right) \\
&= \int_X 2g(x) \, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_X |f_k(x) - f(x)| \, d\mu
\end{aligned}$$

Nyní $\int_X 2g < \infty$ odečtu a dostanu $0 \le -\limsup_{k\to\infty} \int_X |f_k(x) - f(x)| \, d\mu$, daný $\limsup$ je ale jistě nezáporný (integrál z kladné funkce), tedy platí

$$0 = \limsup_{k\to\infty} \int_X |f_k(x) - f(x)| \, d\mu \implies \lim_{k\to\infty} \int_X |f_k(x) - f(x)| \, d\mu = 0$$

A tedy

$$\left| \int_X f - \int_X f_k \right| = \left| \int_X (f - f_k) \right| \le \int_X |f - f_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

□

Příklad (motivace) Chceme vypočítat následující integrál

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{xe^x} \, dx$$

Ten vypočítat neumíme, paradoxně však

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \, dx$$

ano, v případně, že F je spojitá a diferencovatelná:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} F(a) &= \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \, dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \, dx = \int_0^\infty \frac{xe^{-ax}}{xe^x} \, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-(a+1)x} \, dx = \left[\frac{e^{-(a+1)x}}{a+1} \right]_0^\infty
\end{aligned}$$

$$\implies F(a) = \log(a+1) + C \ \& \ F(0) = 0 \implies C = 0 \implies F(a) = \log(a+1)$$

Konec 5. přednášky

Věta L 2.9 (Integrál s hustotou)**.** *Nechť $f : X \to [0,\infty]$ je měřitelná funkce a pro $E \in \mathcal{A}$ definujme $\nu(E) = \int_E f\ d\mu$. Potom ν je míra na X a pro každou měřitelnou $g : X \to [0,\infty]$ platí*

$$\int_X g\ d\nu = \int_X fg\ d\mu.$$

Důkaz. ν **je míra**: $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f\ d\mu = 0$ (V 2.1. e)
Nechť $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, E_k po dvou disjuntktní.

$$\nu(E) = \int_E f\ d\mu = \int_X f\chi_E\ d\mu = \int_X f \sum_{k=1}^\infty \chi_{E_k}\ d\mu = \int_X \sum_{k=1}^\infty f \cdot \chi_{E_k}\ d\mu$$
$$\overset{Levi}{=} \sum_{k=1}^\infty \int_X f\chi_{E_k}\ d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f\ d\mu = \sum_{k=1}^\infty \nu(E_k)$$

Nyní chceme $\int_X g\ d\nu = \int_X g \cdot f\ d\mu$. Na to použijeme standardní důkazovou techniku teorie míry: Charakteristická $\to$jednoduchá $\to$měřitelná.
1) Nejprve pro $g = \chi_E$, $E \in \mathcal{A}$

$$\int_X g\ d\nu = \int_X \chi_E\ d\nu = \int_E\ d\nu = \nu(E) = \int_E f\ d\mu = \int_X f\chi_E\ d\mu = \int_X f \cdot g\ d\mu$$

2) Nyní g jednoduchá.

$$\int_X g\ d\nu = \int_X \sum_{i=1}^k \alpha_i\chi_{A_i}\ d\nu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_X \chi_{A_i}\ d\nu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_X f\chi_{A_i}\ d\mu$$
$$\int_X f \sum_{i=1}^k \alpha_i\chi_{A_i}\ d\mu = \int_X f \cdot g\ d\mu$$

3) Nyní $g \geq 0$ měřitelná. Dle věty 1.10 $\exists s_k \geq 0$ jednoduché $s_k \nearrow g$, tedy $f{\cdot}s_k \nearrow f{\cdot}g$. Dle 2. kroku víme $\int_X s_k\ d\nu = \int_X f \cdot s_k\ d\mu$. Z toho už dostáváme

$$\int_X g\ d\nu \overset{\text{Levi}}{=} \lim \int_X s_k\ d\nu = \lim \int_X fs_k\ d\mu \overset{\text{Levi}}{=} \int_X f \cdot g\ d\mu$$

□

Poznámka: Funkce f se nazývá hustota míry ν vzhledem k μ. Triviálně platí $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Platí to i obráceně (Radon-Nykodým).

3. Teorie integrálu

3.1. Integrál závislý na parametru

Věta L 3.1 (O spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Nechť T je metrický prostor, $\alpha_0 \in T$ a nechť $f : T \times X \to \mathbf{R}$. Nechť*

(i) pro všechna $\alpha \in T$ je funkce $x \to f(x,\alpha)$ měřitelná a

(ii) pro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \to f(x,\alpha)$ spojitá v α_0.

(iii) Nechť existuje $g \in L^1(X,\mu)$ tak, že $|f(x,\alpha)| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in T$.

Potom $F(\alpha) = \int_X f(x,\alpha)\ d\mu(x)$, $\alpha \in T$, je spojitá v α_0.

Důkaz. Chceme $\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = F(\alpha_0)$. Dle Heineho věty nám stačí ($\forall \alpha_k \to \alpha_0 \Rightarrow F(\alpha_k) \to F(\alpha_0)$). Mějme tedy α_k takové a definujme $f_k(x) = f(\alpha_k, x)$
Dle (i) jsou f_k měřitelné. Dle (ii) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} f(\alpha_k, x) = f(\alpha_0, x)$ pro každé pevné x. Dle (iii) máme $|f_k(x)| = |f(\alpha_k, x)| \leq g(x) \;\; \forall x \forall k$
Dle Lebesgueovy věty máme:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} F(\alpha_k) &= \lim_{k\to\infty} \int_X f(\alpha_k, x)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu \\ &= \int_X \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu = \int_X f(\alpha_0, x)\, d\mu \\ &= F(\alpha_0)\end{aligned}$$

□

Věta T 3.2 (O derivaci podle parametru)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a $f : X \times I \to \mathbf{R}$. Nechť*

(i) pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $x \to f(x, \alpha)$ měřitelná,

(ii) pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$,

(iii) existuje $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že $\left|\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$,

(iv) existuje α_0 tak, že $F(\alpha_0) = \displaystyle\int_X f(x, \alpha_0)\, d\mu(x) \in \mathbf{R}$ (je konečný).

Potom $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\, d\mu(x) \in \mathbf{R}$ pro všechna $\alpha \in I$, existuje derivace této funkce a

$$F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, d\mu(x).$$

Důkaz. **1)** Nejprve $F(\alpha) \in \mathbb{R}\ \forall \alpha$. Nechť $\alpha \in I$

$$\begin{aligned}|f(\alpha, x)| &\leq |f(\alpha_0, x)| + |f(\alpha_0, x) - f(\alpha, x)| \\ &= |f(\alpha_0, x)| + \left|(\alpha_0 - \alpha)\frac{\partial f(\xi, x)}{\partial \alpha}\right|, \text{ kde } \xi \in (\alpha_0, \alpha) \\ &\overset{(iii)}{\leq} |f(\alpha_0, x)| + |\alpha_0 - \alpha| g(x) \in L^1(X, \mu)\end{aligned}$$

Tedy $\int_X |f(\alpha, x)| < \infty \Rightarrow F(\alpha) \in \mathbb{R}$

2) Nyní chceme

$$\lim_{\alpha\to\alpha'} \frac{F(\alpha) - F(\alpha')}{\alpha - \alpha'} = \int_X \frac{\partial f(\alpha', x)}{\partial \alpha}\, d\mu$$

Dle Heineho věty stačí $\forall \alpha_k,\ \alpha_k \to \alpha',\ \alpha_k \neq \alpha'$ platí

$$\frac{F(\alpha_k) - F(\alpha')}{\alpha_k - \alpha'} \xrightarrow{k\to\infty} \int_X \frac{\partial f(\alpha', x)}{\partial \alpha}\, d\mu$$

Definujme

$$g_k(x) = \frac{f(\alpha_k, x) - f(\alpha', x)}{\alpha_k - \alpha'}$$

Nyní pro g_k ověříme předpoklady Lebesgueovy věty.
Dle (i) (a dle toho, že součet měřitelných je měřitelný) jsou g_k měřitelné.

Dle (ii) $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(\alpha_k,x)-(\alpha',x)}{\alpha_k-\alpha'} = \frac{\partial f(\alpha',x)}{\partial \alpha}$
Dle (iii)

$$|g_k(x)| = \Big|\frac{f(\alpha_k,x)-f(\alpha',x)}{\alpha_k-\alpha'}\Big| = \Big|\frac{1}{\alpha_k-\alpha'}(\alpha_k-\alpha')\frac{\partial f(\xi,x)}{\partial\alpha}\Big| \le g(x)\ \forall k \forall x$$

Tedy dle Lebesgueovy věty:

$$\lim_{k\to\infty}\int_X g_k\, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k\, d\mu = \int_X \frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial\alpha}\, d\mu$$

Levá strana se ale díky definici g_k a linearitě integrálu rovná $F'(\alpha')$ a tedy je důkaz hotov. $\square$

Poznámka: (iv) je nutná

$$F(a) = \int_0^\infty x\, dx = \infty\ \ \forall a \in I$$

Konec 6. přednášky

3.2. Rovnost skoro všude a upravená definice měřitelnosti

Definice. Nechť $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že vlastnost V platí *skoro všude* na E, jestliže existuje $N \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(N) = 0$ a vlastnost V platí na $E \setminus N$.

Řekneme, že funkce $f, g : X \to \mathbf{R}$ jsou *ekvivalentní* a značíme $f \sim g$, jestliže $f = g$ skoro všude na X, tedy $\mu(\{f \neq g\}) = 0$.

Definice. (Nová definice měřitelnosti) Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f : E \to \mathbf{R}$ pro $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že f je *měřitelná* na X, jestliže $\mu(X \setminus E) = 0$ a $f^{-1}(V) \cap E$ je měřitelná pro každou V otevřenou.

Poznámka 1 Definujme

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{na } E\backslash N \\ 0 & \text{na N} \end{cases}$$

Potom je $\tilde{f}$ měřitelná dle staré definice, a je ekvivalentní f.

Poznámka 2 Stále platí f_k měřitelné, $f_k \to f \Rightarrow f$ měřitelná.

Dále platí i Leviho a Lebesgueova věta, jen je nutno pro konvergence a majoranty brát s.v.

Věta L 3.3 (Lebesgueova věta pro řady)**.** *Nechť $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce a nechť $\sum_{k=1}^\infty \int_X |f_k| d\mu < \infty$ (*). Potom $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konverguje absolutně pro skoro všechna $x \in X$ a*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \Big(\sum_{k=1}^\infty f_k\Big)\, d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_X f_k\, d\mu.$$

Důkaz. Označme $g(x) = \sum_{k=1}^\infty |f_k(x)|$. Pak je g měřitelná (součet + limita) a

$$\int_X g\, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^\infty |f_k(x)| d\mu \overset{\text{Levi}}{=} \sum_{k=1}^\infty \int_X |f_k(x)|\, d\mu \overset{p.p.}{<} \infty$$

Tedy $g \in L^1$ a podle V2.1. h) je $\mu(\{g = \infty\}) = 0$.
Tedy $\sum_{k=1}^\infty |f_k(x)| < \infty \ \overset{\text{s.v.}}{\forall}\ x$, a tedy $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konverguje absolutně pro

s.v. x.
Označme $F_j = \sum_{k=1}^{j} f_k(x)$ Pak F_j jsou měřitelné a

$$|F_j(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{j} f_k(x)\Big| \le \sum_{k=1}^{j} |f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = g(x) \ \forall j \forall x$$

Dle Lebesgueovy věty na F_j:

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, d\mu = \int_X \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} f_k(x)\, d\mu \overset{Leb.}{=} \lim_{j\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{j} f_k(x)\, d\mu$$
$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \int_X f_k(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k(x)\, d\mu$$

□

Poznámka: předpoklad $(*)$ lze nahradit $\exists g \in L^1 : \forall j \left|\sum_{k=1}^{j} f_k(x)\right| \le g(x)$

Věta L 3.4 (Borel-Cantelliho lemma). *Nechť E_k jsou měřitelné množiny a $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$. Potom $A := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k$ má μ míru 0. (Platí $x \in A$, právě když $x \in E_k$ pro nekonečně mnoho k.)*

Poznámka: platí $x \in A \iff x \in E_k$ pro ∞ mnoho k.
$\chi_A(x) = \limsup_{k\to\infty} \chi_{E_k}(x)$. Značíme $A = \limsup_{k\to\infty} E_k$

Důkaz. Označme $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)$. Pak $x \in A \iff g(x) = \infty$

$$\int_X g(x)\, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k} \overset{Levi}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$$

Tedy $g \in L^1$ a podle V 2.1. h $\mu(A) = \mu(\{g = \infty\}) = 0$ □

Věta L 3.5 (Nulovost skoro všude). *a) Nechť $f : X \to [0,\infty]$ je měřitelná, $E \in A$ a $\int_E f\, d\mu = 0$. Potom $f = 0$ skoro všude na E.*
b) Nechť $f : X \to \mathbf{R}$ je měřitelná a nechť pro všechny $E \in \mathcal{A}$ platí $\int_E f\, d\mu = 0$. Potom $f = 0$ skoro všude na X.

Důkaz. **a)** Označme $E_k = \{x :\ f(x) > \frac{1}{k}\}$. Pak $\{x,\ f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Stačí dokázat, že $\mu(E_k) = 0\ \forall k$, pak $f = 0$ s.v. na E. (protože $\mu(\bigcup E_k) \le \sum \mu(E_k) = 0$)
Dle Čebyševovy nerovnosti $\frac{1}{k}\mu(E_k) \le \int_E f\, d\mu = 0 \Rightarrow \mu(E_k) = 0$
b) Nechť $A = \{f > 0\}$. Pak $\int_A f\, d\mu = 0$ a dle a) $f = 0$ s.v. na $A \Rightarrow \mu(A) = 0$.
Analogicky pro $B = \{f < 0\}$ platí $\int_B -f\, d\mu = 0$ a tedy $\mu(B) = 0$ □

3.3. Vztah Lebesgueova integrálu s Riemannovým a Newtonovým

Věta T 3.6 (Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$ (omezeném a uzavřeném).*
a) Jestliže existuje Riemannův integrál funkce f, pak existuje i Lebesgueův a rovnají se.
b) Riemannův integrál existuje, právě tehdy, když f je spojitá skoro všude.

Důkaz. **a)** Nechť $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ je dělení $[a,b]$ a označme $m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i])$ a $M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$, $i = 1, \dots, n$
Položme

$$\alpha_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{(x_{i-1}, x_i]} \text{ a } \beta_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{(x_{i-1}, x_i]}$$

Potom

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i = (L) \int_a^b \alpha_D$$

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i = (L) \int_a^b \beta_D$$

Řekneme, že D_k je dobrá posloupnost dělení, pokud $D_{k+1} \supset D_k$ (D_{k+1} je zjemnění D_k) a $\nu(D_k) \to 0$, kde ν je $\max_i (x_i - x_{i-1})$.
Připomeňme, že $\exists (R) \int_a^b f \iff \forall D_k$ dobré posloupnosti dělení platí

$$\lim_{k \to \infty} S(f, D_k) = \lim_{k \to \infty} s(f, D_k)$$

Nechť D_k je dobrá posloupnost dělení a označme $\alpha_k = \alpha_{D_k}$ a $\beta_k = \beta_{D_k}$
Nechť $|f| \le M$. Víme, že $-M \le \beta_1 \le \beta_2 \le \dots \le f \le \dots \le \alpha_2 \le \alpha_1 \le M$. α_k měřitelné, $|\alpha_k| \le M$, $\alpha_k \overset{monot.}{\searrow}$, tedy $\exists \lim_{k \to \infty} \alpha_k = \alpha$, analogicky i pro $\beta_k \nearrow \beta$.
Dle Lebesgueovy věty tedy

$$(L) \int_a^b \alpha = \lim_{k \to \infty} (L) \int_a^b \alpha_k = \lim_{k \to \infty} S(f, D_k)$$

$$(L) \int_a^b \beta = \lim_{k \to \infty} (L) \int_a^b \beta_k = \lim_{k \to \infty} s(f, D_k)$$

Z $\beta_k \le f \le \alpha_k$ víme, že $\beta \le f \le \alpha$. Víme, že $\exists (R) \int_a^b f$, tedy

$$\lim S(f_k, D_k) = \lim s(f_k, D_k) \Rightarrow \int_a^b \alpha = \int_a^b \beta \Rightarrow \int_a^b (\alpha - \beta) = 0 \overset{V3.5}{\Rightarrow} \alpha = \beta \ s.v.$$

Z toho plyne $\alpha = f$ s.v. a tedy $\exists (L) \int_a^b f = \int \alpha = \lim S = (R) \int$

b) Není obtížné ukázat, že pokud x není dělícím bodem žádného D_k, pak

$$\alpha(x) = \max\{f(x), \limsup_{y \to x} f(y)\}, \quad \beta(x) = \min\{f(x), \liminf_{y \to x} f(y)\}$$

Využijeme tvrzení, že:

$$(\text{☼}) \qquad f \text{ je spojitá v takovém } x \iff \alpha(x) = \beta(x)$$

Samotný důkaz:
($\Rightarrow$) Nechť $\exists (R) \int_a^b f$, pak podle a) $\alpha = \beta$ s.v. a tedy dle (☼) je f spojitá, nebot dělících bodů je jen spočetně, tj. mají nulovou míru.
($\Leftarrow$) Nechť je f spojitá s.v. Nechť D_k je dobrá posloupnost dělení a zadefinujme

si α_k a β_k jako předtím. Opět víme, že $\alpha_k \searrow$ a $\beta_k \nearrow$ a $|f| \leq M$, tedy $\exists \alpha_k \searrow \alpha$, $\beta_k \nearrow \beta$. Funkce f je spojitá s.v. a tedy podle (☼) $\alpha(x) = \beta(x)$ sv. Tedy

$$\lim_{k\to\infty} S(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \alpha_k \overset{Leb.}{=} \int_a^b \alpha$$
$$\underset{s.v.}{\overset{\alpha=\beta}{=}} \int_a^b \beta = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \beta_k = \lim_{k\to\infty} s(f, D_k)$$

□

Konec 7. přednášky

Příklad: Dirichletova funkce $f(x) = \chi_{\mathbf{Q}}(x)$ není Riemannovsky, ale je Lebesgueovsky integrovatelná. (U Riemanna jsou vrchní součty jedna, dolní nula. Lebesgue je triviální - je to jednoduchá funkce)

Poznámka: CHYBÍ, DOPLNIT TYVOLE ASI NE?

Poznámka: Nechť f je spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak

$$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\, dx = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\, dx = (\mathrm{N})\int_a^b f(x)\, dx.$$

Definice. Nechť $f : X \to [-\infty, \infty]$ je měřitelná. Definujeme

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu,$$

má-li pravá strana smysl (může být i $\pm\infty$). Píšeme $f \in L^*(X, \mu)$.

Věta T 3.7 (Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f *je spojitá na* (a, b) *a* $f \in L^*(a, b)$. *Nechť existuje primitivní funkce* F *k* f. *Potom*

$$(L)\int_a^b f = F(b-) - F(a+).$$

Důkaz. Nechť $c \in (a, b)$ a $b_k \nearrow b$. Pak $(c, b_k) \nearrow (c, b)$ a $\nu((c, b_k)) = \int_c^{b_k} f^+\, dx$ je míra. Tedy $(L) \int_c^{b_k} f^+ \to (L) \int_c^b f^+$. Nyní

$$(L) \int_c^{b_k} f^+ = (L) \int_{[c,b_k]} f^+ \overset{f\ spoj}{=} (R) \int_c^{b_k} f^+ = (N) \int_c^{b_k} f^+ = F_1(b_k) - F_1(c)$$

Tedy $\exists \lim_{k\to\infty} F_1(b_k) - F_1(c) = (L) \int_c^b f^+$.
Dle Heineho věty $\exists \lim_{x\to b^-} F_1(x) - F_1(c) = (L) \int_c^b f^+$
Analogicky $\exists \lim_{x\to b^-} F_2(x) - F_2(c) = (L) \int_c^b f^-$.
F se od $F_1 - F_2$ liší pouze o konstantu $(F_1 - F_2)' = f^+ - f^- + b$. Existuje tedy $\lim_{x\to b^-} F(x) - F(c) = (L) \int_c^b f^+ - (L) \int_c^b f^- = (L) \int_c^b f$.
Analogicky $\lim_{x\to a^+} F(c) - F(x) = (L) \int_a^c f$
Sečtením $(L) \int_a^b f = F(b-) - F(a+)$ □

Příklad: Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je Newtonovsky, ale není Lebesgueovsky integrovatelná. Lebesgueův integrál je totiž narozdíl od Newtonova integrálu absolutně konvergentní.

4. Vícerozměrná integrace

Cílem je naučit se 2 věty - Fubiniovu a větu o substituci - a poslechnout si mnoho Henclových historek.

Konec 8. přednášky

4.1. Fubiniova věta v $\mathbf{R}^n$

Definice. Nechť X a Y jsou množiny a f je funkce na $X \times Y$. Definujeme pro $x \in X$ funkci $f_x : y \to f(x,y)$, $y \in Y$, a pro $y \in Y$ definujeme funkci $f^y : x \to f(x,y)$, $x \in X$.

Věta T 4.1 (Fubiniova věta)**.** *Nechť $f \in L^*(\mathbf{R}^{p+q})$. Potom pro $\mathcal{L}_p$ s.v. $x \in \mathbf{R}^p$ existuje*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}^q} f_x \, d\mathcal{L}_q = \int_{\mathbf{R}^q} f(x,y) \, d\mathcal{L}_q(y)$$

a pro $\mathcal{L}_q$ s.v. $y \in \mathbf{R}^q$ existuje

$$\psi(x) = \int_{\mathbf{R}^p} f^y \, d\mathcal{L}_p = \int_{\mathbf{R}^p} f(x,y) \, d\mathcal{L}_p(x)$$

a platí

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}} f \, d\mathcal{L}_{p+q} = \int_{\mathbf{R}^p} \varphi \, d\mathcal{L}_p = \int_{\mathbf{R}^q} \psi \, d\mathcal{L}_q.$$

4.2. Dynkinovy[4] systémy

Definice. Nechť Z je množina a $\mathcal{D} \subset \exp(Z)$. Řekneme, že $\mathcal{D}$ je *Dynkinův systém*, jestliže

(i) $Z \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow Z \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_j \in \mathcal{D}$ jsou po dvou disjunktní $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$.

Poznámka: 1) Každá σ-algebra je Dynkinův systém.
2) $B \subset A,\ A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{D}$ (obecně ne) $(A \backslash B = X \backslash (B \cup (X \backslash A)) \in \mathcal{D})$

Příklad: Nechť $Z = \{1, \dots, 24\},\ \mathcal{D} = \{S;\ S \subset 2^Z,\ S$ má sudý počet prvků$\}$. Pak je $\mathcal{D}$ Dynkinův systém.
Ale $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{D}$, $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin \mathcal{D}$

Věta L 4.2 (Vztah σ-algebry a Dynkinova systému)**.** *Nechť $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. Potom $\mathcal{D}$ je σ-algebra $\Leftrightarrow$ systém $\mathcal{D}$ je uzavřený na tvoření průniku (tedy $E, D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \cap D \in \mathcal{D}$).*

Důkaz. $(\Rightarrow)$ Každá σ-algebra je uzavřená na průniky
$(\Leftarrow)$ Nechť $\mathcal{D}$ je dynkinův systém uzavřený na průniky.

- $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{D}$, neboť $A \backslash B = A \backslash (B \cap A) \in \mathcal{D}$
- $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{D}$, neboť $A \cup B = A \cup (B \backslash A) \in \mathcal{D}$
- $A_j \in \mathcal{D}$, chceme $\bigcup A_j \in \mathcal{D}$: Definujme $\tilde{A}_1 = A_1$, $\tilde{A}_2 = A_2 \backslash A_1$, atd. $\tilde{A}_j = A_j \backslash (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1}) \in \mathcal{D}$. Nyní $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j \in \mathcal{D}$

[4] Eugene Dynkin, ruský matematik, zemřel ve věku 90. let v době naší přednášky (14.11). Jeho systémy ale žijí dále mezi námi

□

Poznámka: Nechť Z je množina a $\mathcal{S} \subset \exp(Z)$. Potom existuje nejmenší Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$ a značíme ho $\delta(\mathcal{S})$. Vždy platí $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. Stejně jako u σ-algeber se jedná o průnik všech dynk. systémů obsahujících $\mathcal{S}$.

Věta T 4.3 (O nejmenším Dynkinově systému)**.** *Nechť $\mathcal{S} \subset \exp(Z)$ obsahuje průnik každých dvou množin z $\mathcal{S}$. Pak $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. [5] $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$ platí vždy.

1) Pro $\delta(\mathcal{S}) \supset \sigma(\mathcal{S})$ stačí dle V4.2. ukázat $\forall D, E \in \delta(\mathcal{S})$ je $D \cap E \in \delta(\mathcal{S})$ (tedy uzavřenost na průniky), protože pak se jedná o σ-algebru obsahující $\mathcal{S}$.
2) Pro $D \in \delta(\mathcal{S})$ definujme $\mathcal{D}_D = \{Q \in 2^Z,\ Q \cap D \in \delta(\mathcal{S})\}$. Pro dokázání uzavřenosti na průniky stačí ukázat, že $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D} \quad \forall D \in \delta(\mathcal{S})$. Chceme tedy dokázat, že $\mathcal{D}_D$ je dynkinův systém.
(i) $Z \in \mathcal{D}_D \dots Z \cap D = D \in \delta(\mathcal{S})$
(ii) Nechť $Q \in \mathcal{D}_D$ (tzn. $Q \cap D \in \delta(\mathcal{S})$). Chceme $Z \backslash Q \in \mathcal{D}_D$. Díky poznámce výše (dynk. systém obsahuje rozdíl vnořených množin):

$$(Z \backslash Q) \cap D = D \backslash (D \cap Q) \in \mathcal{D}_D$$

(iii) Nechť $Q_j \in \mathcal{D}_D$, (tzn. $Q_j \cap D \in \delta(\mathcal{S})$) a Q_j jsou po dvou disjunktní. Pak

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right) \cap D = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q_j \cap D) \in \delta(\mathcal{S}) \text{ neboli } \bigcup_j Q_j \in \mathcal{D}_D$$

3) Z předpokladu máme pro všechny $A, E \in \mathcal{S} : A \cap E \in \mathcal{S} \subset \delta(\mathcal{S})$. Protože je D_E Dynkinův systém a obsahuje $\mathcal{S}$, máme $\delta(S) \subset \mathcal{D}_E\ \forall E \in \mathcal{S}$. Jsme tedy téměř u cíle.
4) Nyní máme, že $\forall B \in \delta(\mathcal{S})$ a $\forall E \in \mathcal{S}$ je $B \cap E \in \delta(\mathcal{S})$. Z toho plyne $E \in \mathcal{D}_B$ pro libovolné $B \in \delta(\mathcal{S})$, tedy $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_B \ \ \forall B \in \delta(\mathcal{S})$ a tedy i $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_B \ \ \forall B \in \delta(\mathcal{S})$, což jsme chtěli dokázat. □

Definice. Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ se nazývá σ-konečná, jestliže existují $S_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbf{N}$, takové, že $\mu(S_k) < \infty$ a $S_k \nearrow X$.

Věta L 4.4 (O jednoznačnosti míry)**.** *Nechť $\mathcal{S} \subset \exp(Z)$ je systém uzavřený vzhledem k průniku, $S_k \in \mathcal{S}$ a $S_k \nearrow Z$. Nechť μ_1 a μ_2 jsou míry na $\sigma(S)$, $\mu_1(S) = \mu_2(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$ $(*)$ a $\mu_1(S_k) < \infty$ pro každé $k \in \mathbf{N}$. Potom $\mu_1 = \mu_2$ na $\sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{S},\ \mu_1(A) < \infty$. Označme:

$$\mathcal{A} = \{D \in \sigma(\mathcal{S}) : \mu_1(D \cap A) = \mu_2(D \cap A)\}$$

Chceme $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$. Z $(*)$ plyne, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je dynkinův systém.

(1) $\mu_1(Z \cap A) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \mu_2(Z \cap A) \Rightarrow Z \in \mathcal{A}$

(2) $D \in \mathcal{A} \overset{?}{\Rightarrow} Z \backslash D \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \mu_1((Z \backslash D) \cap A) &= \mu_1(A \backslash (A \cap D)) = \mu_1(A) - \mu_1(A \cap D) \\ &\underset{A \cap D \in \mathcal{A}}{\overset{\mu_1(A) < \infty}{=}} \mu_2(A) - \mu_2(A \cap D) = \mu_2((Z \backslash D) \cap A) \\ &\Longrightarrow Z \backslash D \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

[5] O něco upraven pro IMO větší srozumitelnost

(3) Nechť $D_j \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní. Pak

$$\mu_1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \cap A\right) = \mu_1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(D_j \cap A)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_1(D_j \cap A)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\mu_2(D_j \cap A) = \mu_2\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \cap A\right)$$

Tedy $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{A}$.

Celkem $\mathcal{S} \in \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ je dynkinův systém, tedy

$$\sigma(\mathcal{S}) \overset{V4.3.}{=} \delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{S}) \Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$$

□

Konec 9. přednášky

Důsledek: Existuje právě jedna míra na $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, která je invariantní vůči posunutí a $\mu([0,1)^n) = 1$.

Proč? Protože víme, že jednotkový □ má míru 1. Po rozdělení □ na n částí je míra káždé části $\frac{1}{n}$, tedy $\mu(Q) = (\frac{1}{2})^n$ pro každou dyadicxkou krychli.
Tedy $\mu = \mathcal{L}^n$ na dyadických krychlích. Tyto míry jsou σ-konečné. (Průnik dvou dyadických krychlí je dyadicka krychle).
$\Longrightarrow$ $\mu = \mathcal{L}^n$ na $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}^n$ (to máme pro všechny otevřené množiny a to musí obsahovat borelovské množiny).

4.3. Součin měr a Fubiniova věta

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Chceme definovat míru $\mu \times \nu$ na $(X \times Y, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$.

Definice. Řekneme, že $M \subset X \times Y$ je *obdélník*, jestliže existují $A \subset X$ a $B \subset Y$ tak, že $M = A \times B$. Pokud $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$, tak M nazveme *měřitelný obdélník*.

Definujeme $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ jako nejmenší σ-algebru obsahující každý měřitelný obdélník. (Pozn. tam už ale nemusí být jen obdélníky - patří tam např. i kruh)

Definice. Nechť $E \subset X \times Y$, $x \in X$ a $y \in Y$. Potom definujeme *řezy*

$$E_x = \{y \in Y : [x, y] \in E\} \text{ a } E^y = \{x \in X : [x, y] \in E\}.$$

Lemma 4.5. *Nechť $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, $x \in X$ a $y \in Y$. Pak $E_x \in \mathcal{T}$ a $E^y \in \mathcal{S}$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} : E_x \in \mathcal{T}\ \forall x \in X\}$. Chceme ukázat, že $\mathcal{A} = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$
$\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ máme z definice, tedy k tomu stačí ukázat, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra a obsahuje měřitelné obdélníky (pak máme i $\mathcal{A} \supset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$)
Nechť $E = A \times B$ je měřitelný obdélník. Pak

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & \text{pro } x \notin A \\ B & \text{pro } x \in A \end{cases}$$

Tedy $E \in \mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ je σ-algebra:

(1) $X \times Y \in \mathcal{A}$, protože $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{T}$

(2) $E \in \mathcal{A} \overset{?}{\Rightarrow} X \times Y \setminus E \in \mathcal{A}$: $((X \times Y)\setminus E)_X = Y \setminus E_x \in \mathcal{T}$ (řez komplementu je komplement řezu)

(3) $E_k \in \mathcal{A} \overset{?}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$: $\left(\bigcup_k E_k\right)_x = \bigcup_k (E_k)_x \in \mathcal{T}$ (řez sjednocení je sjednocení řezů)

Tedy $\mathcal{A}$ je σ-algebra a obsahuje měřitelné obdélníky $\Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Analogicky pro E^y. $\square$

Poznámka: Platí $\mathcal{B}^1 \times \mathcal{B}^1 = \mathcal{B}^2$, ale pro zúplnění ($\mathcal{B}_0$=zúplnění $\mathcal{B}$) neplatí $\mathcal{B}^1_0 \times \mathcal{B}^1_0 = \mathcal{B}^2_0$. Platí však $\mathcal{B}^2_0 =$ zúplnění $\mathcal{B}^1_0 \times \mathcal{B}^1_0$.

Věta T 4.6 (O měřitelnosti míry řezu)**.** *Nechť μ je σ-konečná míra na $\mathcal{S}$, ν je σ-konečná míra na $\mathcal{T}$ a $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Potom $x \to \nu(E_x)$, $x \in X$, je měřitelná funkce (na $(X, \mathcal{S})$) a $y \to \mu(E^y)$, $y \in Y$, je měřitelná funkce (na $(Y, \mathcal{T})$).*

Důkaz. Pro $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ označme $s_E : X \to \mathbb{R}$, $s_E(x) = \nu(E_x)$ (míra řezu).
Chceme ukázat, že s_E je měřitelná.
Nejprve za dodatečného předpokladu $\nu(Y) < \infty$.
Označme $\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} : s_e \text{ je měřitelná } \}$.
Snadno ukážeme, že $A \times B \in \mathcal{D}\ \forall A \in \mathcal{S}\ \forall B \in \mathcal{T}$. Máme $s_{A\times B}(x) = \chi_A(x) \cdot \nu(B)$, kde pravá strana je měřitelná funkce.
Chceme ukázat, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém.

(1) $X \times Y \in \mathcal{D}$... $S_{X\times Y}(x) = \nu(V)$.. konstantní, tedy měřitelná

(2) $E \in \mathcal{D} \overset{?}{\Rightarrow} (X \times Y)\setminus E \in \mathcal{D}$: $S_{(X\times Y)\setminus E}(x) = \nu(Y) - \nu(E_x) \in \mathcal{D}$ jelikož se jedna o konstatnu a měřitelnou fci.

(3) $E_j \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní $\overset{?}{\Rightarrow} \bigcup_j E_j \in \mathcal{D}$

$$s_{\bigcup_j E_j}(x) = \nu\left(\left(\bigcup_j E_j\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_j (E_j)_x\right)$$
$$\underset{\text{disj.}}{\overset{po2}{=}} \sum_{j=1}^{\infty} \nu((E_j)_x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_{E_j}(x) \in \mathcal{D}$$

Protože spočetný součet měřitelných funkcí je měřitelná funkce.

Tedy $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém a obsahuje měřitelné obdélníky
$\Rightarrow \sigma(\text{měř. obdélníky}) = \delta(\text{měř. obdélníky}) \subset \mathcal{D}$
$\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ neboli míra toho řezu je měřitelná.
Analogicky dokážeme $y \mapsto \mu(E^y)$ je měřitelná.

Nyní bez předpokladu $\nu(Y) < \infty$
Ze σ-konečnosti μ na $\mathcal{T}$ existují množiny $Y_k \nearrow Y$, $Y_k \in \mathcal{T}$ tak, že $\nu(Y_k) < \infty$.
Označme $s^k_E = s_E \restriction_{Y_k} = \nu((E \cap Y_k)_x)$. Podle předchozího kroku vzhledem k tomu, že $(\nu(Y_k) < \infty)$ máme, je s^k_E měřitelná.
Nyni $s_E(X) = \sup_{k\in\mathbb{N}} s^k_E(x)$ je měřitelná podle V 1.9
Analogicky pro řez druhým směrem. $\square$

Věta L 4.7 (Existence a jednoznačnost součinové míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou. Potom existuje právě jedna míra $\mu \times \nu$ na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$*

taková, že

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \text{ pro každou } A \in \mathcal{S} \text{ a } B \in \mathcal{T}.$$

Je-li $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, *pak*

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y)\, d\nu(y).$$

Důkaz. Označme $\pi_1(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x)$ Chceme ukázat, že π_1 je míra:
$\pi_1(\emptyset) = \int_x 0 = 0$.. není identicky nekonečno
Nechť Q_j jsou po dvou disjunktní, pak

$$\begin{aligned}
\pi_1\Big(\bigcup_j Q_j\Big) &= \int_X \nu\Big(\Big(\bigcup_j Q_j\Big)_x\Big)\, d\mu(x) = \int_X \nu\Big(\bigcup_j (Q_j)_x\Big)\, d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu\Big((Q_j)_x\Big)\, d\mu(x) \underset{\text{pro řady}}{\overset{Levi}{=}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \nu((Q_j)_x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_1(Q_j), \text{ Tedy } \pi_1 \text{ je míra}
\end{aligned}$$

Dále $\pi_1(A \times B) = \int_X \chi_A(x) \cdot \nu(B)\, d\mu(x) = \mu(A) \cdot \nu(B)$
Dále je π_1 σ-konečná: X a Y jsou σ-konečné, tedy $\exists X_k \in \mathcal{S} : X_k \nearrow X$ a $\exists Y_k \in \mathcal{T}$: $Y_k \nearrow Y$ tak, že $\mu(X_k) < \infty$ a $\nu(Y_k) < \infty$.
$\pi_1(X_k \times Y_k) = \mu(X_k) \cdot \nu(Y_k) < \infty$ a $X_k \times Y_k \nearrow X \times Y$.
Analogicky $\pi_2(Q) = \int_Y \mu(Q^y)\, d\nu(y)$ je σ-konečná míra, $\pi_2(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$
Nyní $\pi_1 = \pi_2$ na měřitelných obdélnících a podle V 4.4 $\pi_1 = \pi_2$ na σ(měřitelné obdélníky) $= \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ □

Poznámka: Pozor, neplatí $\mathcal{L}_{p+q} = \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$. Přesněji $\mathcal{L}_{p+q}$ je zúplnění míry $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$.
Konec 10. přednášky

Lemma 4.8. *Nechť f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelná na $X \times Y$. Potom pro každé $x \in X$ je f_x $\mathcal{T}$-měřitelná a pro každé $y \in Y$ je f^y je $\mathcal{S}$-měřitelná*

Důkaz. Chceme dokázat, že pro každou $V \subset \mathbb{R}$ otevřenou platí $(f_x)^{-1}(V) \in \mathcal{T}$
Víme, že $(f^{-1})(V) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ neboť f je měřitelná. Definujme $G = \{[x, y] : f(x, y) \in V\}$.

$$(f_x^{-1})(V) = \{y, f_x(y) = f(x, y) \in V\} = G_x$$

Dle lemmatu 4.5. je $G_x \in \mathcal{T}$, analogicky pro f^y. □

Věta L 4.9 (Fubiniova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou. Nechť f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelná funkce na $X \times Y$*
a) Je-li $0 \leq f \leq \infty$ a $\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu, x \in X$ a $\psi(y) = \int_X f^y\, d\mu, y \in Y$ pak φ je $\mathcal{S}$-měřitelná a ψ je $\mathcal{T}$-měřitelná a platí:

$$\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu \tag{4.1}$$

b) Je-li $\psi^*(x) = \int_Y |f_x| d\nu$ a $\int \psi^* d\mu < \infty$, potom $f \in L^*(\mu \times \nu)$
c) Nechť f_x je ν integrovatelná pro μ s.v. $x \in X$ a f^y je μ integrovatelná pro ν s.v. $y \in Y$ a $f \in L^1(\mu \times \nu)$. Pak φ je definována pro s.v. $x \in X$, ψ je definována pro s.v. y a platí (4.1)

Důkaz. a) Pro $f = \chi_Q, Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, to víme z V 4.7. dále pro jednoduché, nezáporné měřitelné (LEVI) a obecné.

Pro jednoduché: $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_{Q_i}$.

$$\int_{X \times Y} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_{Q_i} \, d\mu \, d\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{X \times Y} X_{Q_i} \, d\mu \times \nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_X \nu((Q_i)_x) \, d\mu(x) =$$

$$= \int_X \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu((Q_i)_x)) \, d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y s_x \, d\nu(y) \, d\mu(x) \right)$$

Nechť nyní f nezáporná měřitelná, tedy existují jednoduché které ji aproximují. $0 \leq s_k \nearrow f$. Víme

$$\int_{X \times Y} s_k \, d\mu \times \nu = \int_X \left(\int_Y ((s_k)_x \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

To zlimitíme a z Leviho (vlevo), vpravo řezy také rostou takže také levi a máme

$$\int_{X \times Y} f \, d\mu \times \nu = \int_X \left(\lim_{k \to \infty} \int_Y (s_x)_x \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$
$$= \int_X \int_Y f_x \, d\nu(y) \, d\mu(x)$$

b) Podle a) na $|f|$ $\int_{X \times Y} |f| = \int_X \big(\int_Y |f_x| \, d\nu \big) d\mu = \int_X \varphi^* < \infty$

c) $f = f^+ - f^-$.

“ $\varphi = \int f_x = \varphi_1 - \varphi_2 = \int (f^+)_x - \int (f^-)_x$ “

Použijeme a) na f^+: $\infty > \int f^+ \, d\mu \times \nu = \int_X \varphi_x \, d\mu \implies \varphi_1(x) < \infty$ pro s.v. $x \in X$

Analogicky $\varphi_2(x) < \infty$ pro s.v. x. ($\int f^- = \int_X \varphi_2 \, d\mu$)

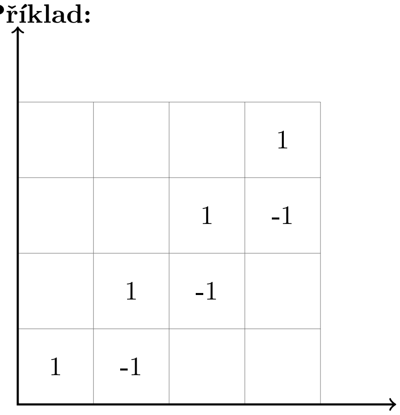
Nyní pro s.v. x $\varphi(x) = \int_Y (f_x) = \int_Y ((f^+)_x - (f^-)_x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ a tohle všechno je konečný a to je z nějakého důvodu dobře. Hencl to řikal a Romana taky. Pochop to později.

Odečetní rovnic pro f^+ a f^- dostaneme požadované

$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi_1 - \varphi_2 = \int_X \varphi$$

Analogicky pro ψ. $\square$

Příklad:



Pozor

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy \right)\ dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx \right)\ dy = 0$$

Nejsou zde splněny předpoklady věty.

Dále: A co zúplnění. Připomeňme $\mathcal{B}_o^k \times \mathcal{B}_0^l \neq \mathcal{B}_o^{k+l}$. Tedy chceme větu i pro to nebo co. A tohle nepatří do toho příkladu.

Věta L 4.10 (Fubiniova věta pro zúplnění)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou a nechť $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})_0$ je zúplnění $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ vzhledem k $\mu \times \nu$. Nechť f je $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})_0$ měřitelná na $X \times Y$. Potom Fubiniova věta platí s touto změnou: Funkce f_x je $\mathcal{T}$-měřitelná pro s.v. x, a tedy φ je definována pouze pro s.v. x. Podobně to platí pro f^y a ψ.*

Důkaz. Nejprve dvě lemma

Lemma 1: Nechť $(Z, \mathcal{A}, \lambda)$ je prostor s mírou, $\mathcal{A}_0$ zúplnění $\mathcal{A}$ vzhledem k λ a g je $\mathcal{A}_0$-měřitelná funkce. Pak existuje $\mathcal{A}$-měřitelná funkce g_0 tak že $g = g_0$ λ-s.v.
Důkaz. Je snadný a prý ho nebudeme dokazovat. Ale každopádně g=charakteristická funkce ano a jinak standard atd. Opičárny □

Lemma 2: Nechť h je $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})_0$ měřitelná funkce na $X \times Y$ a $h = 0$ $(\mu \times \nu)$-s.v. Pak pro s.v. $x \in X$ je $h(x, y) = 0$ pro s.v. $y \in Y$.

Nechť f je $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})_0$. Pak $f = \tilde{f} + h$ Pro $\tilde{f}$ platí FUBINI dle V4.9.

$$\int \tilde{f}\ d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y \tilde{f}$$

Pro h také platí

$$\int h\ d(\mu \times \nu) \overset{s.v.}{=} 0 \overset{(L2)}{=} \int_X 0$$

Sečtením dostaneme požadované speciálně $f_x = \tilde{f}_x$ s.v. vzhledem k y pro s.v. x □

Věta T 4.11 (O součinu Borelovských množin v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$ pak*

$$\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q \subset \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q \subset \mathcal{B}_0^{p+q}$$

a $\mathcal{B}_0^{p+q}$ je zúplnění $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q, \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q)$

Poznámka: Z této věty plyne že $\mathcal{L}^{p+q}$ je zúplnění $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$. Z této věty a V4.10. plyne V4.1.

Důkaz. **Krok 1** $\mathcal{B}^* = \sigma$(ot. mnoz v Rk) $= \sigma$(ot. intervaly v Rk). To je neformální tvrzení které v důkazu použijeme. $\supset$ je jasné protože ot. intevaly jsou ot. množiny. $\subset$ každou otevřenou množinu G v $\mathbb{R}^k$ lze napsat jako spočetné sjednocení otevřených intervalů. ($G = \bigcup$otevřené intervaly s racionálními konci v G) Sigma algebra je uzav. na spoč sjednocení a tak už to plyne a tak.

Konec 11. Přednášky

Pokračování důkazu V4.11: Připomenutí definic a vět - Borelovské množiny, zúplnění (ekvivalentně: $\mu(A \backslash \tilde{A} \cup \tilde{A} \backslash A) = 0$)

Krok 2: $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q$

$\subset$: Vlevo je σotevřených obdélníků, vpravo σměřitelných obdélníků, což je $\subset$.

$\supset$: Mějme $A \times B$ ($A \in \mathcal{B}^p$ $B \in \mathcal{B}^q$) chceme $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$. Nechť $M = \{A \subset \mathbb{R}^p : A \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}^{p+q}\}$. M určitě obsahuje otevřené množiny v $\mathbb{R}^p$. Standardní cvičení ukáže, že M je σ-algebra. Tedy $\mathcal{B}^p \subset M$. Tedy $\forall A \in \mathcal{B}^p$ je $A \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}^{p+q}$. Analogicky $\forall B \in \mathcal{B}^q$ je $B \times \mathbb{R}^p \in \mathcal{B}^{p+q}$. Pak ale tedy $(A \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \cap B) = A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$.

$\mathcal{B}^{p+q}$ je σ-algebra a obsahuje měřitelné obdélníky $\implies \mathcal{B}^{p+q} \supset \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q$

Krok 3: $\mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q \subset \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q$ a to je zřejmé protože jednotlivě jsou oba podmnožiny.

Krok 4: Chceme $\mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q \subset \mathcal{B}_0^{p+q}$

Mějme $A \times B$ ($A \in \mathcal{B}_0^p$ $B \in \mathcal{B}_0^q$) Chceme $A \times B \in \mathcal{B}_0^{p+q}$. $A \in \mathcal{B}_0^p$ tedy existují $A_1 \subset A \subset A_2$ (kde $A_1, A_2 \in \mathcal{B}^p$) a $\mathcal{L}^p(A_2 \backslash A_1) = 0$. Z FUBINIho $\mathcal{L}^{p+q}((A_2 \backslash A_1) \times \mathbb{R}^q) = 0$ a $A_1 \times \mathbb{R}^q \subset A \times \mathbb{R}^q \subset A_2 \times \mathbb{R}^q$, tedy $\mathcal{L}^{p+q}((A_2 \backslash A_1) \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{L}^{p+q}((A_2 \times \mathbb{R}^q) \backslash (A_1 \times \mathbb{R}^q))$.

Tedy $A \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}^{p+q}$ a $\mathbb{R}^p \times B \in \mathcal{B}_0^{p+q}$ a z toho tedy plyne $(A \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times B) = A \times B \in \mathcal{B}_0^{p+q}$

Krok 5: Na $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q$ se $\mathcal{L}^{p+q}$ a $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$ rovnají.

$\mathcal{L}^{p+q}$ a $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$ se rovnají na měřitelných obdeélnících a tento systém je uzavřený na průnik. Dle V 4.6 se tyto dvě míry rovnají na σ(měřitelné obdélníky) $= \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q$.

Krok 6: $\mathcal{B}_0^{p+q} = (\mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q)_0$

$\supset$ víme, $\mathcal{B}_0^{p+q} \supset \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q \implies (\mathcal{B}_0^{p+q})_0 = \mathcal{B}_0^{p+q} \supset (\mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q)_0$

$\subset$ Nechť $A \in \mathcal{B}_0^{p+q}$ chceme $A \in (\mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q)$.

$A \in \mathcal{B}_0^{p+q}$, tak existuje $A_1, A_2 \in \mathcal{B}^{p+q} \overset{2.krok}{=} \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q$ tak že zúplnění..

Tedy $A \in (\mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q)_0 \subset (\mathcal{B}_0^p \times B_0^q)_0$

$\square$

4.4 Obraz míry

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(X', \mathcal{A}')$ jsou měřitelné prostory, $T : X \to X'$ a nechť μ je míra na $\mathcal{A}$. Řekneme, že T je $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-měřitelné, jestliže $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ pro každou $A' \in \mathcal{A}'$

Poznámka: Dosavadní definice měřitelnosti pro X' topologický byla $\mathcal{A} - \mathcal{G}(X')$-měř. Také víme $\mathcal{A} - \mathcal{G}(X') = \mathcal{A} - \mathcal{B}(X')$. Je to tedy zobecnění definice.

Definice. *Obraz míry* μ při $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}'$-měřitelném zobrazení T je míra na $\mathcal{A}'$ definovaná jako $T(\mu)(A') = \mu(T^{-1}(A'))$ pro každou $A' \in \mathcal{A}'$. (Na to potřebujeme aby $T^{-1}(A')$ bylo měřitelné a to máme z minulé definice)

Poznámka: Snadno lze ukázat, že $T(\mu)$ je míra na $(X', \mathcal{A}')$

Věta L 4.12 (O integraci podle obrazu míry). *Nechť T je $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$- měřitelné zobrazení, μ je míra na X a $g' : X' \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Potom*

$$\int_{X'} g' \, dT(\mu) = \int_X (g' \circ T) \, d\mu$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Důkaz proveden pouze pro $g' = \chi_Q, Q \in \mathcal{A}'$ - jinak je to standardní opičárna

$$\int_{X'} g' \, dT(\mu) = \int_{X'} \chi_Q dT(\mu) = T(\mu)(Q) = \mu(T^{-1}(Q)) \overset{*}{=} \int_X \chi_Q o T d\mu$$

$$(*) : \quad X = 1 \text{ pro } T^{-1}(Q), \ 0 \text{ jinak}$$

$\square$

Poznámka: Story o Hardym a padajicim letadle a Fermatove vete
Příklad: Nechť f je spojitá, prostá z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Je f $\mathcal{B}_0^n - \mathcal{B}_0^n$ měřitelná? - NE!

Devil's staircase. **OBRÁZEK**. To lze rozšířit na spojitou funkci. (Jaký rozdělení má df Cantora??). Sestrojíme spojité f_k ty konvergují stejnoměrně a tedy Cantor je spojitý.

Označme $g(x) = C(x) \times x$. Pak $g : [0,1] \overset{na}{\to} [0,2]$ spojité, prosté. (Pozn. Cantor je univerzální protikpříklad na všechno).

Cantorovo diskontinuum $D := [0,1] \backslash \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup \dots\}$. Pak ale $0 = \mathcal{L}^1(D) = 1 - \frac{1}{3} - 2\frac{1}{3^2} - \dots - 2^k \frac{1}{3^k} - \dots = 0$ protože je to součet geometrické řady.

Jak vypadá $\mathcal{L}^1(g(D))$? Máme $\mathcal{L}^1(g([0,1]) \backslash D)) = 1 = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + \dots$ a tedy $\mathcal{L}^1(g(D)) = 2 - \mathcal{L}^1(g([0,1] \backslash D)) = 1$

(BTW: Existuje f spojitá a prostá a $\mathcal{L}^1(D) = 0$ tak, že $\mathcal{L}^1(f(D)) > 0$)

V každé množině kladné míry existují neměřitelné množiny (bez důkazu, makes sense). Existuje tedy $F \subset g(D)$ neměřitelná a označme $A = g^{-1}(F)$ zřejmě $A \subset D \implies \mathcal{L}^1(A) = 0 \implies A \in \mathcal{B}_0^1$

f spojitá a prostá a A měřitelná, že $g(A) = F$ je neměřitelná.

Označme $h = g^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ spojitá prostá.

Existuje h spojitá, prostá, A měřitelná, F neměřitelná, že $h^{-1}(A) = F$ je měřitelná.

Existuje spojitá funkce $C(x) : [0,1] \to [0,1]$, $C'(x) = 0$ s.v. (na $[0,1] \backslash D$, ale není konstantní.

Existuje h spojitá prostá a $\mathcal{L}^1(D) = 0$ tak, že $\mathcal{L}^1(h^{-1}(D)) > 0$

Příklad: Existuje f ryze rostoucí, že $f' = 0$ s.v.
Poznámka: Každý trojúhelník je rovnoramenný

Konec 12. Přednášky

4.5. Věta o substituci

Tvrzení. Nechť M je $n \times m$ matice. Potom existují ortonormální matice A, B a diagonální matice C tak, že $M = ACB$

Důsledek: Nechť M je $m \times n$ regulární matice a mějme linerání rozbraní $\varphi(x) = Mx$. Pak pro každou otevřenou množinu $O \subset \mathbb{R}^n$ platí':

$$\mathcal{L}^n(\varphi(O)) = (\det\ M) \cdot \mathcal{L}^n(O)$$

Důkaz. **a)** $O =$ interval a $M = C$ diagonální $diag(c_1, ..., c_n)$

$$\mathcal{L}^n(\varphi(I)) = c_1 i_1 \times \dots \times c_n i_n = c_1 \cdots c_n \cdot i_1 \cdots i_n = \det(C) \mathcal{L}^n(I)$$

b) O obecná $M = C$ diagonální. Existují intervaly I_k: $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k$ jsou po dvou disjunktní.

$$\mathcal{L}^n(C \cdot O) = \mathcal{L}^n\left(C \bigcup I_k\right) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_k \left(cI_k\right)\right) \overset{C \cdot I_k \text{disj.}}{=} \sum_k \mathcal{L}^n(CI_k)$$
$$= \sum_k \det C \mathcal{L}^n(I_k) = \det C \mathcal{L}^n(O)$$

c)

$$\mathcal{L}^n(A \cdot C \cdot B - O) \overset{?}{=} \det(A \cdot C \cdot D) \mathcal{L}^n(O)$$

ale to se rovná

$$\mathcal{L}^n(C \cdot \underbrace{B \cdot O}_{=\tilde{\sigma}}) = \det(C) \mathcal{L}^n(\underbrace{B \cdot O}_{\tilde{\sigma}})$$

□

Důsledek: $g' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ měřitelná, $Tx = Mx$ regulární, pak

$$\int_{\mathbb{R}^n} g' \; dT(\mathcal{L}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} g'(Mx) \; d\mathcal{L}^n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g'(x) \; dy = \int_{\mathbb{R}^n} g'(Mx)(\det M) \; dx$$

Pozn: $\left(T(\mathcal{L}^n)(A') = \mathcal{L}^n(T^{-1}(A')) = \mathcal{L}^n(M^{-1}(A')) = \det M^{-1} \mathcal{L}^n(A') \right)$

Definice. Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : V \to \mathbb{R}^n$ je C^1 zobrazení (tedy všechny první parciální derivace jsou spojité). Definujme *Jacobiho matici* zobrazení f:

$$D_{f(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

a **Jacobián** tohoto zobrazení jako $J_f(x) = \det D_f(x)$

Definice. Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : V \to \mathbb{R}^n$ je C_1 zobrazení. Řekneme, že f je *difeomorfismus*, je-li toto zobrazení prosté a regulární, tedy $J_f(x) \neq 0 \;\; \forall x \in V$

Věta T 4.13 (Věta o substituci). *Nechť $V \in \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : V \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus. Nechť $M \subset V$ a $g : M \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce, pak*

$$\int_M g \; d\mathcal{L}^n = \int_{f^{-1}(M)} (g \circ f)|J_f| \; d\mathcal{L}^n$$

Pokud má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Pouze idea: Rozdělníme si na krychličky tak, že je f téměř lineární na každé krychličce. Na to použiju větu kterou již mám. Řikal toho ještě mnohem víc, ale mně se vybila baterka. □

Příklad:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} = J$$

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} \; dx \int_0^\infty e^{-y^2} \; dy = \int_{(0,\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)} \; d\mathcal{L}^2 \overset{s}{=} \int_{(0,\infty)\times(0,\frac{\pi}{2})} e^{-r^2} r \; dr d\alpha$$

$$J^2 \overset{\text{FUBINI}}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r \; d\alpha \right) dr = \int_0^\infty e^{-r^2} r \frac{\pi}{2} \; dr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha} \frac{1}{2} \; d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\implies J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Poznámka: Polární souřadnice

OBRAZEK

$$g(r, \alpha) = [rcos\alpha, r \sin\alpha], \;\; r \in (0, \infty), \;\; \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$g : (0, \infty) \times (0, \frac{\pi}{2}) \overset{\text{na}}{\to} (0, \infty)^2$$

Chceme dokázat, že se jedná o bijekci:

g je prosté: $g(r_1, \alpha_1) = g(r_2, \alpha_2) \implies r_1 = r_2$ a $\alpha_1 = \alpha_2$

$$r_1 \cos\alpha_1 = r_2 \cos\alpha_2 \qquad (1)$$
$$r_1 \sin\alpha_1 = r_2 \sin\alpha_2 \qquad (2)$$

$(1) \oplus (2) \implies r_1^2 = r_2^2 \implies r_1 = r_2 \implies \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2$

g je na: Chceme $\forall [x_0, y_0] \in (0,\infty)^2\ \exists r, \alpha$ tak, že $g(r, \alpha) = [x_0, y_0]$. Položme

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\alpha = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

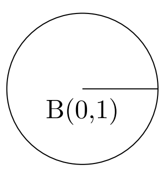
Dále: $g \in C^1$:

$$\det D_g = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ r(-\sin\alpha) & r\cos\alpha \end{pmatrix} = r\cos^2\alpha - (-r\sin^2\alpha) = r > 0$$

Tedy g je difeomorfismus.

Příklad: Obsah kruhu

$$x^2 + y^2 \le r^2$$
$$\mathcal{L}^2(B_1) = \iint\limits_{\{x^2+y^2 \le r^2\}} 1 = \iint 1 \cdot r\ dr d\alpha \overset{*}{=} \int_0^{2\pi} 1\ dx \cdot \int_0^R r\ dr$$
$$(0, R) \times (0, 2\pi) \to \{x^2 + y^2 \le R^2\} \backslash \{[t, 0] : t \in [0, R]\}$$



Poznámka: Sférické souřadnice OBRAZEK

$$x = r\cos\varphi\cos\psi \qquad r \in (0, \infty)$$
$$y = r\sin\varphi\cos\psi \qquad \varphi \in (0, 2\pi)$$
$$z = r\sin\psi \qquad \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Potom $x^2 + y^2 + z^2 = \cdots = r^2$

f je prosté, na a C^1 (tentokrát už nebudeme ověřovat)

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\psi \\ -r\sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -r\cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\psi \end{vmatrix} = r^2\cos\psi > 0$$

Příklad: Míra jednotkové koule + Další příklad

$$\mathcal{L}^3(B(0,1)) = \int\limits_{\{x^2+y^2+z^2 \le 1\}} 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot r^2 \cdot \cos\psi\ d\psi d\varphi dr$$
$$= \int_0^1 r^2\ dr \cdot \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\ d\psi = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2} r^2 \cos\psi \; d\psi d\varphi dr = \int_0^1 r^3 \; dr \int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \; d\psi$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$$

Konec 13. Přednášky

Definice: Pro $s > 0$ definujeme *Gamma funkce*, $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \; dx$

Vlastnosti Γ: $\Gamma(1) = 1, \; \Gamma(s+1) \overset{PP}{=} s\Gamma(s) \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \overset{s}{=} \Big[a = \sqrt(x), da = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Big] = \int_0^\infty 2e^{-a^2} da = \sqrt{\pi}$$

+ Nějakej další příklad

5. Prostory L^p a různé konvergence

5.1. Prostory L^p

Věta L 5.1 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor, $f \in L^1(\mu)$, $a, b \in [-\infty, \infty]$ a $f : X \to (a, b)$. Je-li $\varphi : (a, b) \to \mathbf{R}$ konvexní funkce, pak*

$$\varphi\Big(\int_X f \; d\mu \Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) \; d\mu.$$

Konvexita: $\varphi(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{\varphi(a)}{2} + \frac{\varphi(b)}{2}$.. speciální případ Jensenovy nerovnosti. Pro $x = \{0, 1\}$, Diracova míra $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ $f : X \to \mathbb{R}$ $f(0) = a$ $f(1) = b$

$$\varphi\Big(\int_X f \; d\mu \Big) = \varphi\Big(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \Big) \leq \int_X \varphi \circ f \; d\mu = \frac{\varphi(a)}{2} + \frac{\varphi(b)}{2}$$

Máme pravděpodobnostní prostor,

$$f = a \cdot \chi_{\{0\}} + b \cdot \chi_{\{1\}}, \; \int_X f \; d\mu = a \cdot \mu(\{0\}) + b \cdot \mu(\{1\}) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$\int_X (\varphi \circ f) \; d\mu = \int_X \varphi(f(x)) \; d\mu, \text{ kde } \varphi(f(x)) = \varphi(a) \cdot \chi_{\{0\}} + \varphi(b) \cdot \chi_{\{1\}}$$

Důkaz. (Věty)
Označme $t = \int_x f \; d\mu$ vážený průměr podle míry, $f : X \overset{do}{\to} (a, b)$ ($\Rightarrow t \in (a, b)$)a $\mu(X) = 1$.
Definujme $\beta = \sup_{a<s<t} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}$ (supremum směrnic).
Pro $s < t$ platí

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} \leq \beta \Rightarrow \varphi(s) - \varphi(t) \geq \beta(s - t)$$

Pro $s > t$ platí

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} \geq \beta \Rightarrow \varphi(s) - \varphi(t) \geq \beta(s - t)$$

Tedy

$$\forall s \in (a, b) : \varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t)$$

Toto použijeme pro $s = f(x)$, $\varphi(f(x)) \geq \varphi(t)+\beta(f(x)-t)$ tato funkce je měřitelná, neboť φ konvexní je spojitá. Tedy integrací dostaneme

$$\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) \geq \int_X \varphi(t)\, d\mu(x)+\beta \int_X (f(x)-t)\, d\mu = \varphi(t)+\beta(t-t) = \varphi\Big(\int_X f\, d\mu\Big)$$

$\square$

Příklad: Důkaz AG nerovnosti. $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mu = \frac{1}{n}\delta_1 + \frac{1}{n}\delta_2 + \dots + \frac{1}{n}\delta_n$. $f : X \to \mathbb{R}$, $f(1) = a_1$ $f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$
Jensen dá pro $\varphi(x) = \exp(x)$:

$$\exp\Big(\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\dots+\frac{a_n}{n}\Big) = \exp\Big(\int_X f\, d\mu\Big) \leq \int_X \exp(f(x))\, d\mu = \frac{\exp(a_1)}{n}+\dots+\frac{\exp(a_n)}{n}$$

Označme $b_j = exp(a_j) > 0$, potom dostáváme

$$\sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n} \leq \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$$

Definice. Nechť $1 < p < \infty$, pak číslo q splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nazveme *sdružený exponent*. Pro $p = 1$ definujeme $q = \infty$ a pro $p = \infty$ definujeme $q = 1$.

Věta T 5.2 (Hölderova a Minkonvského nerovnost)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostors mírou, $1 < p < \infty$, q je sdružený exponent k p a $f, g : X \to [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce. Potom platí Hölderova nerovnost*

$$\int_X fg\, d\mu \leq \Big(\int_X f^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X g^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

a Minkowského nerovnost

$$\Big(\int_X (f+g)^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_X f^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X g^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz. Označme $A = \big(\int_X f^p\, d\mu\big)^{\frac{1}{p}}$ a $B = \big(\int_X g^p\, d\mu\big)^{\frac{1}{q}}$.
Můžeme předpokládat, že $0 < A < \infty$ a $0 < B < \infty$, jinak je to snadné ($\int f^p = 0 \Rightarrow f = 0$ s.v.)
Označme $F(x) = \frac{f(x)}{A}$ a $G(x) = \frac{g(x)}{B}$. Pak $\int_X (F(x))^p = 1 = \int_X (G(x))^p$
Tedy $F(x) < \infty$ a $G(x) < \infty$ pro s.v. $x \in X$.
Vezměme $x \in X$ takové, že $0 < F(x) < \infty$ a $0 < G(x) < \infty$. Pak existuje a, b tak, že $F(x) = e^{\frac{a}{p}}$ a $G(x) = e^{\frac{b}{q}}$.
Z Jensenovy nerovnosti pro $\varphi(x) = \exp(x) : e^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}} \leq \frac{1}{p}e^a + \frac{1}{q}e^b$.
Tedy $F(x) \cdot G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q$
Potom evidentně platí i pro $F(x) = 0$ nebo $G(x) = 0$, ted platí to pro s.v. $x \in X$.
Integrací dostaneme

$$\int F(x) \cdot G(x)\, d\mu \leq \frac{1}{p}\int (F(x))^p\, d\mu + \frac{1}{q}\int (G(x))^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \int_X \frac{f \cdot g}{AB}\, d\mu \leq 1 \Rightarrow \int_X f \cdot g\, d\mu \leq AB = \Big(\int_X f^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int_X g^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Nyní spočítáme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

a to použijeme pro úpravu (pozn: $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$)

$$
\begin{aligned}
\int_X (f+g)^p &= \int_X f(f+g)^{p-1} + \int_X g(f+g)^{p-1} \\
&\overset{Holder}{\le} \left(\int_X f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X g^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overset{*}{=} \left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_X f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_x g^p\right)^{\frac{1}{p}} \right)
\end{aligned}
$$

($*$) zkrátíme a dostaneme: $(p-1)q = p$.
Dále:

$$\left(\int_X (f+g)^P\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pokud ovšem nedělíme 0 či ∞:
Pokud $\int_X (f+g)^p \, d\mu = 0 \Rightarrow (M)$ triviálně platí
Pokud $\int_X (f+g)^p \, d\mu = \infty$ pak z konvexity funkce $t \mapsto t^p$ dostaneme

$$\infty = \int_X \left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}\int_x f^p + \frac{1}{2}\int_x g^p$$

tedy buď je $\int_X f^p = \infty$ nebo $\int_X g^p = \infty$ a (M) opět platí. $\square$

Konec 14. Přednášky

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 \le p < \infty$. Definujeme *prostor* L^p jako

$$L^p(X,\mu) := \{f : X \to \mathbf{R} : \ \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

kde

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice. Nechť $g : X \to [0,\infty]$ je měřitelná. *Esenciální supremum* g definujeme jako

$$\operatorname{esssup} g := \inf\big\{\alpha : \ \mu(g > \alpha) = 0\big\}.$$

Prostor $L^\infty(X,\mu)$ definujeme jako

$$L^\infty(X,\mu) := \{f : X \to \mathbf{R} : \ \|f\|_{L^\infty} := \operatorname{esssup}|f| < \infty\}.$$

Poznámka: Platí

$$\operatorname{esssup}_{x\in X} g = \inf_{\substack{N \subset X \\ \mu(N)=0}} \big(\sup_{x \in X \setminus N} g(x)\big)$$

(tedy dám pryč nulové množiny)

Věta L 5.3 (Trojúhelníková nerovnost v L^p)**.** *Nechť* $1 \le p \le \infty$. *Pak pro* $f, g \in L^p(X,\mu)$ *platí*

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Důkaz. Pro $1 \le p < \infty$ plyne z Minkovského nerovnosti:

$$\left(\int_x |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X |f| \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pro $p = \infty$

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{esssup}|f+g| & \le & \operatorname{esssup}|f| & + & \operatorname{esssup}|g| \\
= & & = & & = \\
\sup_{x\in X\setminus N_1}|(f+g)(x)| & & \sup_{x\in X\setminus N_1}|f(x)| & & \sup_{x\in X\setminus N_3}|g(x)| \\
= & & = & & = \\
\sup_{x\in X\setminus N}|(f+g)(x)| & \le & \sup_{x\in X\setminus N}|f(x)| & + & \sup_{x\in X\setminus N}|g(x)|
\end{array}$$

(Pro $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ platí $\mu(N) = 0$ □

Poznámka: Víme, že L^p je lineární vektorový prostor ($f, g \in L^p$ a $\alpha \in \mathbf{R}$, pak $f + g \in L^p$ a $\alpha f \in L^p$). Místo funkcí z L^p budeme uvažovat třídy ekvivalence vzhledem k rovnosti skoro všude. Na tomto prostoru (na třídách ekvivalence) je $\|f\|_{L^p}$ norma. Takto chápaný L^p je metrický prostor s metrikou

$$\varrho(f, g) = \|f - g\|_{L^p}.$$

Ověření metrického prostoru:

(1) $\varrho(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$ s.v.
(2) $\varrho(f, g) = \varrho(g, f)$
(3) $\varrho(f, g) \le \varrho(f, h) + \varrho(h, g)$

Definice. Metrický prostor (X, ϱ) je *úplný*, pokud je každá Cauchyovská posloupnost konvergentní. Tzn:

$$x_n \in X \text{ Cauchyovská: } \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n, m \ge n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Konvergentní: $\exists x \in X : x_n \to x$

Věta T 5.4 (Úplnost L^p prostorů)**.** *Nechť* $1 \le p \le \infty$*. Pak prostor* $L^p(X, \mu)$ *je úplný.*

Důkaz. Pro $p = \infty$ nebudeme dělat, je to snazší ($f_k \ldots \operatorname{esssup} f_k = \sup_{x\in L\setminus N_k} f_k$ na $X \setminus \bigcup N_k$, $f_k \overset{L^\infty}{\Rightarrow} f \iff f_k \rightrightarrows f$)
Nechť $1 \le p < \infty$ a f_k je Cauchyovská posloupnost v L^p. Chceme ukázat, že existuje $f \in L^p$ tak, že $f_k \overset{L^p}{\to} f$. Funkci f nalezneme jako bodovou limitu vhodné podposloupnosti
Z Cauchyovskosti f_k dokážeme nalézt $k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \ldots$ tak, že

$$\left\|f_{k_j} - f_{k_{j+1}}\right\| \le \frac{1}{2^j}$$

Defingujme $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)|$ a $g_n(x) = \sum_{j=1}^{n} |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)|$
Z Minkovského nerovnosti (resp. z $\triangle$ nerovnosti)

$$\|g_n\|_{L^p} \le \sum_{j=1}^{n} \left\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\right\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$$

Z Fatouova Lemmatu:

$$\int_X g^p = \int_X \liminf_{n\to\infty} g_n^p \le \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n^p \le \liminf 1 \le 1$$

Tedy $g(x) < \infty$ s.v., tedy pro s.v. $x \in X$: $\sum_{j=1}^{\infty}(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x))$ konverguje absolutně. Tedy konverguje i $f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x))$ s.v. Tento součet označíme jako $f(x)$:

$$f_{k_{n+1}}(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{n}(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)) \overset{s.v.}{\to} f(x)$$

Nyní chceme ukázat, že $f \in L^p$ a $\|f_i - f\|$ je malé.
Z Cauchyovskosti dostaneme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_o : \|f_m - f_n\|_{L^p} < \varepsilon$
Volme $m \geq n_0$ pevné. Z Fatouova Lemmatu

$$\int_X |f - f_m|^p = \int_x \liminf j \to \infty |f_{k_j} - f_m|^p \leq \liminf_{j\to\infty} \int_X |f_{k_j} - f_m|^p$$
$$\Rightarrow \|f - f_m\|_{L^p} \leq \varepsilon \Rightarrow \underbrace{(f - f_m)}_{\in L^p} + f_m \in L^p$$

Dále jsme ukázali, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m \geq n_0 : \|f - f_m\|_{L^p} \leq \varepsilon \Rightarrow f_m \overset{L^p}{\to} f$ □

Poznámka: Z důkazu předchozí věty plyne $f_k \overset{L^p}{\to} f \Rightarrow \exists$ podposloupnost $f_k \overset{s.v.}{\to} f$

5.2. Různé typy konvergence

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f,\ f_k : X \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f_k *konvergují podle míry* μ k f a značíme $f_k \overset{\mu}{\to} f$, jestliže pro každé $\delta > 0$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \mu\big(\{x \in X :\ |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}\big) = 0.$$

Pozn. Megadrsnej "komutativni" diagram konvergencí. OBRAZEK
Příklad Příklady konvergence.
Konec 15. Přednášky

Věta L 5.5 (Vztah konvergence L_p a konvergence v míře)**.** *Nechť* $1 \leq p < \infty$ *a* $f_k \to f$ *v* $L^p(X, \mu)$. *Pak* $fk \overset{\mu}{\to} f$.

Důkaz. Nechť $\delta > 0$. Podle Čebyševovy nerovnosti máme

$$\mu(\{|f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}) \leq \frac{1}{\delta^p}\int_X |f_x(x) - f(x)|^p d\mu(x)$$
$$= \frac{1}{\delta^p}||f_k - f||_{L^p}^p \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

□

Věta L 5.6 (Důsledky stejnoměrné konvegence)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou a nechť* $f_k, f : X- > \mathbb{R}$ *jsou měřitelné. Nechť* $\forall \varepsilon > 0 \exists E \in \mathcal{A}$ *tak, že* $\mu(X \backslash E) \subset \varepsilon$ *a* $f_k \rightrightarrows f$ *na* E. *Pak* $f_k \overset{\mu}{\to} f$ *a* $f_k \to f$ *sv. na* X.

Důkaz. Nechť $\delta > 0$ chceme $\lim_{k\to\infty} \mu(\{|f_k - f| \geq \delta\}) = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$, nalezneme $A \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(A) < \varepsilon$ a $f_k \rightrightarrows f$ na $X \backslash A$.
Tedy

$$\exists n_0 \forall k \geq n_0 \forall x \in X \backslash A |f_k(x) - f(x)| < \delta$$

Nyní zřejmě $\{|f_k - f| \geq \delta\} \subset A \forall k \geq n_0$
Tedy

$$\mu(\{|f_k - f| \geq \delta\} \leq \mu(A) \leq \varepsilon \implies \lim \mu(\{|f_k - f| \leq \delta\}) \leq \varepsilon \forall \varepsilon \implies \lim = 0$$

k $\varepsilon_1 = 1\ \exists A_1, f_k \rightrightarrows f$ na $X\backslash A_1$ a $\mu(A_1) < 1 \implies f_k \to f$ na $X\backslash A_1$
a tedy k $\varepsilon_n = \frac{1}{n}\exists A_n, f_k \rightrightarrows f$ na $X\backslash A_n$ a $\mu(A_n) < \frac{1}{n} \implies f_k \to f$ na $X\backslash A_n$

Celkem $f_k \to f$ na $\bigcup_n (X\backslash A_n) = X\backslash \bigcap_n A_n$ ale $\mu(\bigcap_n A_n) = 0$ a to je konvergence skoro všude. □

5.3 Luzinova a Jegorovova věta

Věta T 5.7 (T Jegorova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s konečnou mírou. Nechť $f_k : X \to \mathbb{R}$ je posloupnost měřitelných funkcí. Nechť $f_k \to f$ s.v. a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje $E \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(X\backslash E) < \varepsilon$ a $f_k stejnf$ na E.*

Důsledek: Z Jegorovy věty a z věty 5.6. plyne: Nechť $\mu(X) < \infty$ a $f_k \to f$ s.v., pak $f_k \xrightarrow{\mu} f$

Příklad: $f_k(x) = \frac{x}{k}$ na $(0, \infty)$. Potom máme $f_k(x) \to 0$ všude na $(0, \infty)$ ale $f_k \overset{L^1}{\not\to} 0$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $f_k \to f$ všude na X.
Pro $k, m \in \mathbb{N}$ definujeme

$$E_{k,m} = \bigcup_{j=k}^{\infty} \{x \in X \, |f_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\}$$

Množiny $E_{k,m}$ jsou měřitelné a zřejmě $E_{k+1,m} \subset E_{k,m}$
Nechť m je pevné. Pak $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,m} = \emptyset$, jinak by v bodě $x \in \cap_{k=1}^{\infty} E_{k,m}$ neplatilo $f_k(x) \to f$. Dále $\mu(E_{1,m}) < \infty$ tedy $\lim_{k\to\infty} \mu(E_{k,m}) = 0$
Tedy $\forall n \exists k(n)$ tak že $\mu(E_{k(n),n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Položme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k(n),n}$
Pak

$$\mu(M) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{k(n),n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Položme $E = X\backslash M$, pak $\mu(X\backslash E) < \varepsilon$
Nechť $m \in \mathbb{N}$ pak $E = X\backslash M \subset X\backslash E_{k(m),m}$
Tedy $\forall j \geq k(m) \forall x \in E (\subset X\backslash E_{k(m),m})$ platí

$$|f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$$

Celkem $\forall m \in \mathbb{N} \exists k(m) : \forall j \geq k(m) \forall x \in E$ pak $|f_j(x) - f(x)| < \frac{l}{m}$ Tedy $f_j \rightrightarrows f$ na E □

Poznámka: Platí (ale nebudeme dokazovat). Nechť $f_k \xrightarrow{\mu} f$ pak existuje podposloupnost f_{k_j} tak, že $f_{k_j}(x) \to f(x)$ pro s.v. $x \in X$

Poznámka: Meritelna implikuje spojitou v pripade ze je nespoj jen na mnozine epsilonove miry

Věta T 5.8 (T Aproximace měřitelné množiny pomocí otevřené)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná a $\varepsilon > 0$. Pak existují otevřená množina G a uzavřená F tak, že $F \subset A \subset G$ a $L^n(G\backslash F) < \varepsilon$. (až na množinu epsilonové mírz je každá množina otevřená)*

Důkaz. Definice:

$$L^n(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} L^n(I_j),\ I_j \text{ intervaly},\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\Big\}$$

$\varepsilon > 0$ a $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$. Nechť navíc $A \subset B(0,K)$
Dle definice L^n $\exists$ intervaly I_j, tak, že $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ a $L^n(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \subset A) < \varepsilon$ (tzn pro A měřitelnou $L^n(\bigcup I_j) = L^n(A)$
Tedy existují $\mathcal{F}_j$ otevřené intervaly tak, že $I_j \subset \tilde{I}_j$ a $L^n(\tilde{I}_j \setminus I_j) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Pak $A \subset \bigcup \tilde{I}_j$ a $L^n(\bigcup \tilde{I}_j \setminus A) < 2\varepsilon$

Uvažme $B(0,K+1)\setminus A$. Podle předchozí části důkazu $\exists \tilde{G}$ otevřená:

$$B(0,K+1)\setminus A \subset \tilde{G} \text{ a } L^n(\tilde{G}\setminus(B(0,K+!)\setminus A)) \subset 2\varepsilon$$

Položme $F = B(\bar{0,K})\setminus\tilde{G}$ to je uzavřená množina a $F \subset A$ a $L^n(A\setminus F) < 2\varepsilon$
Nyní $F \subset A \subset G$ a $L^n(G\setminus F) = L^n(G\setminus A) + L^n(A\setminus F) < 4\varepsilon$
2. Nyní A obecná. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap B(0,k))$
Podle přechozího $\exists G_k$ otevřené $A \cap B(0,k) \subset G_k$ a $L^n(G_k\setminus(A \cap B(0,k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$
Pak $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ je otevřená, $A \subset G$ a $L^n(G\setminus A) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$
Přechod k doplňku dá uyvařenou množinu $F \subset A$ tak, že $L^n(A\setminus F) \subset \varepsilon$
Rozpis posledního kroku: $\mathbb{R}^n\setminus A \exists \tilde{G}$ otevřená, $\mathbb{R}^n\setminus A \subset G$ a $L^n(G\setminus(\mathbb{R}^n\setminus A)) < \varepsilon$. Položme $F = \mathbb{R}^n\setminus\tilde{G}$ Pak dostáváme $F \subset A$ a $L^n(A\setminus F) < \varepsilon$ □

Konec 16. Přednášky
Důsledek: Pro každou $A \subset \mathbb{R}^n$ měřitelnou existují G_δ množina B a F_σ množin C tak, že $C \subset A \subset B$ a $L^n(B\setminus C) = 0$

Důkaz. Z věty pro $\varepsilon_k = \frac{1}{k} \exists F_k, G_k$ $F_k \subset A \subset G_k$ a $L^n((G_k\setminus F_k) < \frac{1}{k}$. Položme $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ a $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ a tedy $L^n(B\setminus C) \leq L^n(G_k\setminus F_k)$ □

Věta T 5.9 (T Luzinova věta)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to R$ je měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Potom existuje borelovská množina $A \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $L^n(A) < \varepsilon$ a $f|_{\mathbb{R}^n\setminus A}$ je spojitá.*

Poznámka: a) $f \to \mathbb{R}$ je spojitá $\iff$ $f^{-1}(G)$ je otevřená $\forall G \subset \mathbb{R}$ otevřené $\iff$ $f^{-1}(I_j)$ je otevřená, $I_j = (p_j, q_j)$ i všechny takové intervaly.
Důkaz: $\implies$ je jasné, opačně: $G = \bigcup_{I_j \subset G} I_j$

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\Big(\bigcup_{I_j \subset G} I_j\Big) = \bigcup_{I_j \subset G} f^{-1}(I_j)$$

Poslední výraz je spočetné sjednocení otevřených množin a tedy otevřená množina.
b) $f : \mathbb{R}^n\setminus A \to \mathbb{R}$ Jak vypadají otevřené množiny v $\mathbb{R}^n\setminus A$?
$M \subset \mathbb{R}^n\setminus A$ je otevřená $\iff$ $\exists$ G otevřená v $\mathbb{R}^n$ a $M = G \cap (\mathbb{R}^n\setminus A)$

Důkaz. Podle pozdnámky stačí ukázat $f^{-1}(I_j)$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^n\setminus A$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ víme $f^{-1}(I_j)$ je měřitelná a tedy podle věty 5.8. existují množiny $F_j, G_j,\ F_j \subset f^{-1}(I_j) \subset G_j$ a $L^n(G_j\setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.
Položme $A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(G_j\setminus F_j)$, pak A je borelovská $L^n(A) \leq \sum L^n(G_j\setminus F_j) < \varepsilon$
Označme $g = f|_{\mathbb{R}^n\setminus A}$. Pak $F_j \cap (\mathbb{R}\setminus A) \subset g^{-1}(I_j) \subset G_j \cap (\mathbb{R}^n\setminus A)$ protože $g^{-1}(I_j) = f^{-1}(I_j) \cap (\mathbb{R}^n\setminus A)$
Ale $G_j\setminus F_j \subset A \implies (G_j\setminus I_j) \cap (\mathbb{R}^n\setminus A) = \emptyset$, tedy $F_j \cap (\mathbb{R}^n\setminus A) = G_j \cap (\mathbb{R}^n\setminus A)$
Tedy $g^{-1}(I_j) = G_j \cap (\mathbb{R}^n\setminus A)$ a podle poznámky b) je $g^{-1}(I_j)$ otevřená v $\mathbb{R}^n\setminus A$. □

6. Rozklad měr a Lebesgue-Stieltjesovy míry

6.1 Znaménkové míry

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$. Pak μ nazveme *znaménková míra*, jestliže: (1) $\mu(\emptyset) = 0$ a (2) μ je σ-aditivní.

Poznámka: Znaménková míra nemůže zároveň nabývat ∞ a $-\infty$. Důkaz: Pro spor pp. $\mu(A) = \infty$, $\mu(B) = -\infty$. Potom

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A)$$

Ale na pravé straně musí někde být $\infty - \infty$ někde.

Příklad: a) Nechť μ_1 je konečná míra a μ_2 je míra. Pak $\mu = \mu_1 - \mu_2$ .. $\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$ je znaménková míra. (a dokonce si později řekneme, že každá znaménková míra se dá napsat takto a do určité míry i jednoznačně)
b) Nechť ν je míra a $f \in L^*(v)$. Pak $\mu(E) = \int_E f \, d\nu$ je znaménková míra.

Definice. Nechť μ je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Množina $P \in \mathcal{A}$ se nazývá *nezáporná*, jestliže $\mu(P \cap A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$. Analogicky definujeme *nekladnou* množinu.

Věta T 6.1 (Hahnův rozklad)**.** *Necht μ je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Potom existuje Hahnův rozklad, tedy existuje $P \in \mathcal{A}$ tak, že $\forall A \in \mathcal{A}$ platí: $\mu(A \cap P) \geq 0$ a $\mu(A \cap (X \backslash P)) \leq 0$.*

Příklad: OBRAZOK

Poznámka: Nechť μ je znaménková míra, pak platí

(1) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B$ a $|\mu(B)| < \infty \implies |\mu(A)| < \infty$
(2) $A_k \in \mathcal{A},\ A_k \nearrow A \implies \mu(A_k) \to \mu(A)$
(3) $A_k \in \mathcal{A},\ |\mu(A_1)| < \infty,\ A_k \searrow A \implies \mu(A_k) \to \mu(A)$

Důkaz pro míry je zároveň důkazem pro znaménkové míry.

Důkaz. BÚNO $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty)$. Tvrdím, že platí (♫)[6]:

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \neq -\infty, \exists P \subset A, \mu(P) \geq \mu(A), P \text{ je nezáporná množina}$$

Dokončíme důkaz a pak ukážeme (♫).
Označme $s := \sup\{\mu(A), A \in \mathcal{A}\} \geq 0$ ($vol A = prazdna$). Z definice suprema existuje $P_n \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(P_n) \to s$
Díky (♫) můžeme předpokládat, že P_n jsou nezáporné.

Položme $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, pak P je nezáporné a $\mu(P) = s$. $\bigcup_{n=1}^k P_n \overset{k \to \infty}{\nearrow} P$ a tedy $\mu(\bigcup) \geq P_k = s_k \to s$ a tedy taky $\mu(A \cap \bigcup_n P_n) \geq 0$ (trik zdisjunktnění).

Ukážeme, že $X \backslash P$ je nekladná množina. Ukážeme sporem - nechť existuje $E \in \mathcal{A},\ E \subset X \backslash P$, že $\mu(E) > 0$. Pak $\mu(P \cup E) = \mu(P) + \mu(E) = s + \mu(E) > s$ a to je spor.

Nyní chceme dokázat (♫).

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \exists P \subset A,\ \mu(P) \geq \mu(A) \text{ a } \forall B \subset P,\ \mu(B) \geq 0$$

[6] Mráček jsem nenašel, tedy notička

Dokážeme slabší tvrzení (♪):

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall A \in \mathcal{A},\ \exists A' \subset A,\ \mu(A') \geq \mu(A) \text{ a } \forall B \subset A' : \mu(B) \geq -\varepsilon$$

Sporem:

$$\exists \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A},\ \forall A' \subset A,\ \mu(A') \geq \mu(A)\ \exists B' \subset A',\ \mu(B') < -\varepsilon$$

Toto pro $A'_1 = A$ dá $\exists B'_1 \subset A$, že $\mu(B'_1) < -\varepsilon$.

Označme $A'_2 = A \backslash B'_1$, pak $\mu(A'_2) = \mu(A) - \mu(B'_1) \geq \mu(A) + \varepsilon \geq \mu(A)$ Tedy existuje $B'_2 \subset A'_2$ tak, že $\mu(B'_2) < -\varepsilon$. Položme $A'_3 = A'_2 \backslash B'_2$ a postupujeme indukcí. Dostaneme po dvou disjunkntní $B'_j \subset A$ tak, že $\mu(B'_j) < -\varepsilon$
Nyní $\mu(A \backslash \bigcup_j B'_j) = \mu(A) - \sum_j \mu(B'_j) = \infty$ protože $\mu(A) \neq -\infty$ a $\mu(B'_j) = -\infty$ a tedy (♫) skutečně platí
Konec 17. Přednášky
Pokračování důkazu 6.1: Zvolme $\varepsilon_k \searrow 0$
Použiju (♪) pro A a dostanu $A_1 \subset A,\ \mu(A_1) \geq \mu(A)$ a $\forall B \subset A_1$, tak $\mu(B) \geq -\varepsilon$
Nyní použiju (♪) na A_1 a dostanu $A_2 \subset A_1 (\subset A)$ tak, že $\mu(A_2) \geq \mu(A_1)(\geq \mu(A))$ a $\forall B \in A_2$ tak $\mu(B) \geq -\varepsilon_2$
Pokračujeme indukcí a dostaneme $A_k \searrow$ tak, že $A_k \subset A,\ \mu(A_k) \geq \mu(A)$ a $\forall B \subset A_k$ tak $\mu(B) \geq -\varepsilon_k$
Položme $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, pak $P \subset A$ a $\mu(A_k) \geq \mu(A)$ (a $|\mu(A_k)| = |\mu(A)| = \infty$).
Z poznámky 2) dostaneme, že $\mu(P) \geq \mu(A)$
Nechť $B \in \mathcal{A}$, $B \subset P$, pak $(B \in A_k \Rightarrow \mu(B) \geq -\varepsilon_k) \forall k \Rightarrow \mu(B) \geq 0$

□

Poznámka: Hahnův rozklad je jednoznačný až na množinu nulové míry. Jsou li $(P, X \backslash P)$ a $(P', X \backslash P')$ dva Hahnovy rozklady, pak $\mu(P \backslash P') = 0$ a $\mu(P' \backslash P) = 0$, protože

$$P \backslash P' \subset P \Rightarrow \mu(P \backslash P') \geq 0 \text{ a } P \backslash P' \subset X \backslash P' \Rightarrow \mu(P \backslash P') \leq 0$$

Příklad Máme míru ν.. $\mu(E) = \int_E f\, d\nu,\ f \in \mathcal{L}^1(\nu)$..

Definice. Nechť μ je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$ a $(P, X \backslash P)$ je Hahnův rozklad. Definujeme *kladnou část míry* μ^+, *zápornou část míry* μ^- a *totální variaci míry* $|\mu|$ jako:

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap P),\ \mu^-(A) = -(A \cap (X \backslash P)) \text{ a } |\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$$

Poznámka: Zřejmě μ^+ a μ^- jsou míry na $(X, \mathcal{A})$ a nezávisí na konkrétním Hahnově rozkladu $(P, X \backslash P)$, zřejmě také platí $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$

6.2. Radon-Nikodýmova věta

Definice. Nechť μ je míra na $\mathcal{A}$ a ν je znaménková míra na $\mathcal{A}$. Řekneme, že ν je *absolutně spojitá* vzhledem k μ (píšu $\nu << \mu$) jestliže

$$\text{pro všechny } A \in \mathcal{A} \text{ platí } \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Řekneme, že ν je *singulární* vzhledem k μ (píšu $\nu \perp \mu$) jestliže

$$\text{existuje } S \in \mathcal{A} \text{ tak, že } \mu(S) = 0 \text{ a } |\nu|(X \setminus S) = 0.$$

Příklad

(1) $\mu = \mathcal{L}^1,\ \nu(E) = \int_X f(x)\ dx\ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)\ \mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f(x)\ dx = 0 = \nu(A) \Rightarrow \nu << \mathcal{L}^1$

(2) $\mu = \mathcal{L}^1,\ \nu = \delta_0,$ kde δ_0 je diracova míra pro nulu. Pak $\mathcal{L}^1(\{0\}) = 0$ ale $\delta_0(\mathcal{R}\backslash\{0\}) = 0 \Rightarrow \delta_0 \perp \mathcal{L}^1$

Věta T 6.2 (Radon-Nykodim)**.** *Nechť μ je konečná míra na $\mathcal{A}$ a μ je konečná znaménková míra na $\mathcal{A}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) $\nu << \mu,$

(ii) existuje $f \in L^1(\mu)$ tak, že $\nu(A) = \int_A f\ d\mu$ pro všechny $A \in \mathcal{A}$.

Důkaz. (ii)$\Rightarrow$(i) Story a Kořínkovi a zřejmých větách
(i)$\Rightarrow$(ii) BÚNO ν je míra (pokud je znaménková, rozložíme ji na ν^+ a ν^-). Chceme nalézt $f \geq 0$ měřitelnou, aby $\nu(A) = \int_X f\ d\mu$ (pak automaticky $f \in \mathcal{L}^1$ neboť $\nu(X) = \int f\ d\mu$).
Označme

$$M = \{g : V \to \mathbb{R},\ g \text{ měřitelná},\ g \geq 0 \text{ a } \forall A \in \mathcal{A} : \int_A g\ d\mu \leq \nu(A)\}$$

(tedy g je "minoranta" funkce f a budeme chtít nějakou minorantu v nějakém smyslu největší)
$M \neq \emptyset,\ g = 0 \in M$
M je stabilní na maximum - pokud dostanu $g_1, g_2 \in M \Rightarrow \max\{g_1, g_2\} \in M$ (Důkaz): Nechť $A \in \mathcal{A}$ a označme $A_1 = A \cap \{g_1 \leq g_2\}$. Pak

$$\int_A \max\{g_1, g_1\}\ d\mu = \int_{A_1} g_2\ d\mu + \int_{A\backslash A_1} g_1\ d\mu \overset{defM}{\leq} \nu(A_1) + \nu(A\backslash A_1) = \nu(A)$$

Z definice suprema $\exists g_k \in M$ tak, že $\int_X g_k\ d\mu \to \sup_{g\in M}\{\int_X g\ d\mu\}$
Položme $f_k = \max\{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \in M$ a díky $f_k \geq g_k$ máme $\int_X f_k\ d\mu \to \sup_{g\in M} \int_X g\ d\mu$.
Nyní $f_k \nearrow$, tedy existuje bodová limita $f_k(x) \nearrow f(x)$
Tvrdím, že $f \in M$, dokážeme: f je měřitelná (limita měř.), nezáporná (limita nezáp.) a

$$\forall A : \int_A f_k\ d\mu \leq \nu(A) \overset{Levi}{\Rightarrow} \int_A f\ d\mu \leq \nu(A)$$

Tedy opravdu $f \in M$, navíc

$$\int_X f\ d\mu \overset{Levi}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\ d\mu = \sup_{g\in M} \int_X g\ d\mu$$

Označme $\lambda_0(A) = \nu(A) - \int_A f\ d\mu$ (víme již ≤ 0). Toto je míra.

Chceme dokázat, že $\forall A \in \mathcal{A}$ je $\lambda_0(A) = 0$. Pro spor předpodkládejme, že $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $\lambda_0(X) > \varepsilon\mu(X)$. Podle věty 6.1. existuje Hahnův rozklad $\lambda_0 - \varepsilon\mu$ na $(P, X\backslash P)$ Tvrdím, že $\mu(P) > 0$, jinak

$$\overset{\nu<<\mu}{\Rightarrow} \nu(P) = 0 \Rightarrow \lambda_0(P) = 0 \Rightarrow (\lambda_0 - \varepsilon\mu)(P) = 0$$

ale $0 < (\lambda_0 - \varepsilon\mu)(X) \underset{vyse}{\overset{viz}{=}} (\lambda_0 - \varepsilon\mu)(P) + (\lambda_0 - \varepsilon\mu)(X\backslash P) \leq 0$ a to je spor.

$(P, X\backslash P)$ je Hahnův rozklad $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} : \lambda_0(A \cap P) \geq \varepsilon\mu(A \cap P)$, tedy

$$\nu(A) \overset{def\ \lambda_0}{=} \lambda_0(A) + \int_A f\, d\mu \geq \lambda_0(A \cap P) + \int_A f\, d\mu$$
$$\geq \varepsilon\mu(A \cap P) + \int_A f\, d\mu = \int_A f + \varepsilon\chi_P\, d\mu$$

Tedy $\tilde{f} = f + \varepsilon\chi_P \in M$, ale

$$\int_X \tilde{f}\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \varepsilon\mu(P) \geq \int_X f\, d\mu = \sup_{g\in M} \int_X g\, d\mu$$

Ale to je spor s tím, že λ_0 není identicky 0, tedy $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \nu(A) = \int_A f\, d\mu$ $\square$

Věta T 6.3 (Lebesgueův rozklad)**.** *Nechť μ je míra na $\mathcal{A}$ a μ je σ-konečná znaménková míra na $\mathcal{A}$. Potom existuje jednoznačný rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ tak, že $\nu_a << \mu$ a $\nu_s \perp \mu$.*

Důkaz. **Jednoznačnost:** $\nu = \nu_a + \nu_s \overset{*}{=} \nu'_a + \nu'_s$ Ze singularity: $\exists S \mu(S) = 0,$ a $\nu_s(X\backslash S) = 0$ a stejně i pro čárkované míry.
Pro $A \in \mathcal{A}$ platí $B = (S \cup S') \cap A,\ C = A\backslash(S \cup S')$ (OBRAZEK). Platí

$$\mu(B) \leq \mu(S) + \mu'(S') = 0 \Rightarrow \nu_a(B) = 0 = \nu'_a(B) \overset{*}{\Rightarrow} \nu_a(B) = \nu'_a(B)$$

Dále $\nu_s(C) = \nu'_S(C) = 0$, neboť C neleží v $S \cup S'$ a tedy i $\nu_a(C) = \nu'_a(C)$
Součtem $\nu_a(A) = \nu'_a(A)$ a $\nu_s(A) = \nu'_s(A)$
Konec 18. Přednášky

Pokračování důkazu V 6.3. Existence: BÚNO ν je míra. Nechť nejprve ν je konečná míra. Označme

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{A} : \mu(B) = 0\}$$

Z definice suprema $\exists B_j : \nu(B_j) \overset{j\to\infty}{\to} \sup_{B\in\mathcal{M}} \nu(B)$.
Položme $M = \bigcup_j B_j$ pak $\mu(M) = 0$
Položme $\nu_S(A) = \nu(A \cap M)$ a $\nu_A = (A \cap (X\backslash M))\ \forall A \in \mathcal{A}$
Zřejmě je $\nu = \nu_s + \nu_a$
Nyní $\mu(M) = 0$ a $\nu_s(X\backslash M) = \nu((X\backslash M) \cap M) = 0$, tedy $\nu_s \perp \mu$

Zbývá dokázat, že $\nu_a << \mu : \forall A \in \mathcal{A}\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu_a(A) = 0$
Pokud by to nebyla pravda, tak

$$\nu(A \cup M) = \nu(A\backslash M) + \nu(M) > \nu(M)$$

ale $\mu(A \cup M) = 0$, neboť $A \cup M \in \mathcal{M}$. Tedy pro $\nu(M) = \lim \nu(B_j) = \sup_{B\in\mathcal{M}} \nu(B)$ a to je spor.

Obecně ν je σ-konečná míra: $\exists A_j$ disjunktní $\bigcup_j A_j = X$ a $\nu(A_j) < \infty$.
Podle předchozí části $\nu|_{A_j} = (\nu_a)_j + (\nu_s)_j$, $\nu|_{A_j} = \nu(A \cap A_j)\ \forall A \in \mathcal{A}$
Položme $\nu_s = \sum_{j=1}^{\infty} (\nu_s)_j$ $\nu_a = \sum_{j=1}^{\infty} (\nu_a)_j$

$\square$

6.3. Lebesgue-Stieltjesova míra

Definice. Řekneme, že $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je *distribuční funkce*, je-li neklesající, zprava spojitá, $F(-\infty)(= \lim_{x\to-\infty} F) = 0$ a $F(\infty) = 1$.

Počet skoků v distribuční funkci může být nejvýše spočitatelná (v každém skoku je racionální číslo)

$$F(x) = \sum_j \frac{1}{2^j} \chi_{\{[q_j,\infty)\}}(x), k_j \text{ je j-té racionální číslo}$$

Definice. (Připomenutí) Nechť μ je míra v $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$. Řekneme, že μ je borelovská, pokud $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$

Věta L 6.4 (Existence distribuční funkce)**.** *Nechť μ je borelovská pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ a definujme $F(x) = \mu((-\infty, x])$ pro $x \in \mathbf{R}$. Potom F je distribuční funkce.*

Důkaz. Nechť $x \leq y$, pak $(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(y) = \mu((-\infty, y]) \geq \mu((-\infty, x]) = F(x) \Rightarrow$ F je neklesající.

Nechť $x_k \searrow x$, $(\mu((-\infty, x_1]) \leq \mu(\mathbb{R}) = 1)$ pak $(-\infty, x_k] \searrow (-\infty, x] \Rightarrow F(x_k) \overset{k\to\infty}{\to} F(x) \Rightarrow$ F zprava spojitá.
Dále $(-\infty, k) \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow F(k) \to \mu(\mathbb{R}) = 1$. $F(k) \to 1$
F neklesající $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
Analogicky $(-\infty, -k] \searrow \emptyset \Rightarrow F(-k) \to \mu(\emptyset) \overset{Fnekles}{\Rightarrow} \lim_\infty F = 0$ □

Věta T 6.5 (Charakterizace distribuční funkce)**.** *Nechť F je distribučńi funkce. Potom existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra μ na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ tak, že $F(x) = \mu((-\infty, x])$ pro $x \in \mathbf{R}$.*

Důkaz. Definujme

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{F(x)\} & \text{je li F v x spojitá} \\ [F(x)] & \text{celý interval "nespojitosti"} \end{cases}$$

V bodě spojitosti je to funkční hodnota, v bodě nespojitosti je to celý ten interval skoku.
Označme $S = \{y \in [0,1] : \Phi^{-1}(y)$ má víc jak jeden bod $\}$. Pak S je nejvýše spočetná. Chceme definovat $\mu(A) = \mathcal{L}^1(\Phi(A))$

Problémy: a) Je $\Phi(A)$ měřitelná $\forall A \in \mathcal{B}^1$?, b) je μ míra? Označme

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B} : \Phi(A) \in \mathcal{B}\}$$

Pak:

- $\mathcal{M}$ obsahuje intervaly, neboť $\Phi(\text{interval}) = \widetilde{interval}$
- $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$, neboť $\Phi(\mathbb{R}) \in \{(0,1), [0,1], (0,1], [0,1)\}$ (také "$\Rightarrow$" μ bude pravděpodobnost)
- $A \in \mathcal{M} \overset{?}{\Rightarrow} \mathbb{R}\backslash A \in \mathcal{M}$. Platí $\Phi(\mathbb{R}\backslash A) = (\Phi(\mathbb{R})\backslash\Phi(A)) \cup S_1 \in \mathcal{B}$, kde $S_1 \subset S$
- $A_j \in \mathcal{M} \overset{?}{\Rightarrow} \bigcup_j A_j \in \mathcal{M}$: $\Phi(\bigcup_j A_j) = \bigcup_j \Phi(A_j)$, tedy OK.

Tedy $\mathcal{M}$ je σ-algebra a obsahuje intervaly $\Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, tedy $\Phi(A) \in \mathcal{B}\ \forall A \in \mathcal{B}$, tedy $\mu(A) = \mathcal{L}^1(\Phi(A))$ je korektně definováno.

μ je míra: $\mu(\emptyset) = \mathcal{L}^1(\Phi(\emptyset)) = \mathcal{L}(\emptyset) = 0$
Nechť $A_j \in \mathcal{B}$ po dvou disjuktní. Pak $\forall i \neq j : \Phi(A_i) \cap \Phi(A_j) \subset S$. Tedy $\Phi(A_j)$ jsou "skoro disjukntní".

$$\mu\left(\bigcup A_j\right) = \mathcal{L}^1\left(\Phi\left(\bigcup A_j\right)\right) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_j \Phi(A_j)\right) \underset{\sigma-aditivita}{\overset{skorodisj.}{=}} \sum_j \mathcal{L}^1\left(\Phi(A_j)\right) = \sum \mu(A_j)$$

Tedy μ je borelovská pravděpodobnostní míra + skoro disjunktní.
Zjevně $\Phi((-\infty, x]) = [0, F(x)]$ tedy $F(x) = \mu((-\infty, x]) = \mathcal{L}^1(\Phi((-\infty, x]))$ $\square$

Poznámka Nechť F je distribuční funkce. Pak existují neklesající funkce F_A, F_C, F_J (A = absolutně spojitá, C = Cantor, J = jump) tak, že $F = F_A + F_C + F_J$ a platí

$$F_J(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \chi_{([k_j,\infty))}$$

$F - F_J$ je spojitá, $(F_C)'(x) = 0$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ a $\exists f \in L^1(\mathbb{R})$ tak, že $F_A(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$

Proč? $F \dots \mu \overset{V6.3}{=} \mu_a + \mu_s,\ \mu_a << L^1,\ \mu_s \perp L^1$
Dle V6.2. $\exists f \in L^1$, $\mu_s = \int f(x)\, dx$, $F_s(x) = \int_{-\infty}^{x} d\mu_1(x) = \mu_a((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f\, dL^1$
$F_J \dots \mu_J = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \delta_{s_j} \perp L^1$
Konec 19. Přednášky

Věta L 6.6 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál)**.**

Důkaz. BÚNO předpokládejme $\mu(a) = \nu(a) = 0$ (jde jen o posunutí, rozdíl se nemění)

$$\mu(b)\nu(b) - 0 = \mu((a,b]) \cdot \nu([a,b]) = \int_{(a,b]} \Big(\nu([a,x)) + \nu([x,b))\Big)\, d\mu(x)$$
$$= \int_{(a,b]} \nu(x)\, d\mu(x) + (\mu \times \nu)(\{[x,y] : a < x \le y < b\})$$
$$\overset{FUB}{=} \int_{(a,b]} \nu(x)\, d\mu(x) + \int_{[a,b)} \mu((a,y])\, d\nu(y) = \int_{(a,b]} \nu\, d\mu + \int_{[a,b)} \mu\, d\nu$$

OBRAZEK $\square$

7. Konstrukce míry

7.1. Abstraktní vnější míra

Definice. Množinová funkce $\mu^* : \exp(X) \to [0, \infty]$ se nazývá *vnější míra*, pokud platí

(*i*) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(*ii*) pro $A \subset B$ platí $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$,

(*iii*) pro posloupnost množin $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ množin z X platí $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Vlastnost (*iii*) nazýváme *σ-subaditivita*.

Věta L 7.1 (O generování vnější míry)**.** *Nechť X je množina, $\mathcal{T} \subset \exp(X)$, $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$, a nechť funkce $\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ splňuje $\tau(\emptyset) = 0$. Pro $A \subset X$ definujeme*

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k) :\ T_k \in \mathcal{T},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\Big\}.$$

Potom μ^* je vnější míra na X.

Např $\mathcal{T}$ = systém všech intervalů a τ = jejich volume (z toho pak už budeme mít Lebesguea)

Důkaz. (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ zřejmé (prázdná množina je sjednocením ničeho či co)
(ii) infimum z větší množiny je větší než infimum z menší množiny
(iii) Stačí dokázat pro $A_k \subset X : \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) < \infty$, volume $\varepsilon > 0$ protože jinak by (iii) automaticky platila. Pro pevné A_k existuje $T_{k,j} \in \mathcal{T}$ tak, že $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T_{k,j}$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(T_{k,j}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$
Nyní $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} T_{k,j}$ a tedy

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum j \mu^*(T_{k,j} \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

Nyní $\varepsilon \to 0^+$ dokončí důkaz □

Poznámka Historka o pastelce.

Příklady

(1) $\mathcal{L}_n^*(A) = \inf\{\sum \mathrm{vol} I_k, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$ je vnější míra.
(2) Nechť F je distribuční funkce, $\mathcal{T} = \{(a,b]\}$ (množina polootevřených intervalů) a $\tau((a,b]) = F(b) - F(a)$ pak konstrukce z předchozí věty dá příslušnou Lebesgue-Stieltjesovu míru. (tedy vlastně dokazujeme to co bylo dokázáno minulou kapitolu)
(3) (Hausdorff) Nechť $1 \leq k \leq n$ a $\delta < 0$ Definujme $\mathcal{T} = \{S \subset \mathbb{R}^n :\ \mathrm{diam}\ S < \delta\}$ a $\tau(S) = (\mathrm{diam} S)^k$. Potom je $\mathcal{H}_\delta^k(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam} S_j)^k\ \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j,\ \mathrm{diam} S_j < \delta\}$ je vnější míra. Jejich limita $\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}_\delta^k(A)$ se nazývá *Hausdorffova k-rozměrná míra* a dá se dokázat, že je to míra na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Definice. Nechť μ^* je vnější míra na X. Množina $A \subset X$ se nazývá μ^**-měřitelná*, jestliže pro každou množinu $E \subset X$ platí

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Poznámka: ze σ-aditivity vždy platí

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A))$$

Tedy pro dokázání rovnosti nám vždy stačí pouze druhá nerovnost.

Věta T 7.2 (Carathéodoryho věta)**.** *Nechť μ^* je vnější míra na X a $\mathcal{A}$ je systém všech μ^*- měřitelných množin. Potom $(X, \mathcal{A}, \mu^*|_{\mathcal{A}})$ je úplný prostor s mírou.*

Pozn.: úplný prostor s mírou je to samé jako prostor s úplnou mírou

Důkaz. Chceme dokázat, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra a $\mu^(*|_\mathcal{A}$ je σ-aditivní
1. krok: $\emptyset \in \mathcal{A}\ \forall E$, neboli $\mu^*(E) = \mu^*(E\cap\emptyset) + \mu^*(E \cap X)$ tak to asi platí tomu by se dalo věřit
Nyní $A \in \mathcal{A} \overset{?}{\Rightarrow} X\backslash A \in \mathcal{A}$. Z $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \forall E \mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E \cap (X\backslash A))$
2. krok: Jen jedna nerovnost, druhá je automaticky ze σ-aditivity ($\leq$ platí vždy, chceme $\geq$). $\mathcal{A}$ je uzavřená na sjednocení dvou (a tedy konečně) množin. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.
Chceme $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A\cup B)) + \mu^*(E\cap(X\backslash(A\cup B)))$.
Ale (OBRAZEK) $E\cap(A\cup B) = (E\cap A\cap B)\cup(E\cap A\cap(X\backslash B))\cup(E\cap B\cap(X\backslash A))$
Nyní

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\underset{\text{testuji } E}{\overset{A\in\mathcal{A}}{=}} \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap(X\backslash A))\\ &\underset{\text{testuji } E\cap A}{\overset{B\in\mathcal{A}}{=}} \mu^*(E\cap A\cap B) + \mu^*(E\cap A\cap (X\backslash B)) + \mu^*((E\cap(X\backslash A)\cap B)\\ &+ \mu^*(E\cap(X\backslash A)\cap(X\backslash B))\\ &\mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu^*(E\cap(X\backslash(A\cup B))\end{aligned}$$

což je to, co jsme chtěli dokázat.
<u>Konec 20. Přednášky</u>
3. krok: Nechť μ^* je aditivní. Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktní, pak z měřitelnosti A na testovací množině $A\cup B$:

$$\mu^*(A\cup B) = \mu 6 * ((A\cup B)\cap A) + \mu^*(A\cup B\cap(X\backslash A))$$

ale $A\cup B = A$ a $B\cap(X\backslash A) = B$
4. krok: $A_k \in \mathcal{A}$, $k\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{A}$ (což spolu s krokem 1 dá $\mathcal{A}$ je σ-algebra)
Standardně můžeme předpokládat, že A_k jsou po dvou disjuktní (kdyžtak trik zdisjunktnění - víme, že $\mathcal{A}$ je uzavřená na doplňky a sjednocení a tedy můžeme toto použít).
Označme $B_0 = \emptyset$, $B_k = \bigcup_{i=1}^k A_i$ a $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$.
Nechť $E \subset X$. Díky měřitelnosti $A_k \in \mathcal{A}$ na testovací množině $B_k\cap E$:

$$\begin{aligned}\mu^*(B_k\cap E) &= \mu^*(B_k\cap E\cap A_k) + \mu^*(B_k\cap E\cap(X\backslash A_k))\\ &= \mu^*(A_k\cap E) + \mu^*(B_{k-1}\cap E)\end{aligned}$$

Indukcí ukážeme $\mu^*(B_k\cap E) = \sum_{i=1}^k \mu^*(A_i\cap E)$
Z kroku 2 víme $B_k\in\mathcal{A}$, tedy z měřitelnosti B_k na testovací množinu E dostaneme:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E\cap B_k) + \mu^*(E\cap(X\backslash B_k))\\ &\geq \sum_{i=1}^k \mu^*(A_i\cap E) + \mu^*(E\cap(X\backslash A))\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{k\to\infty}$ dá

$$\begin{aligned}\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i\cap E) + \mu^*(E\cap(X\backslash A)) &\underset{\text{aditivita}}{\overset{\sigma\text{ sub}}{\geq}} \mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty(A_i\cap E)) + \mu^*(E\cap(X\backslash A))\\ = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(E\cap(X\backslash A))&\\ \Rightarrow \mu^*(A\cap E) + \mu^*(E\cap(X\backslash A)) = \mu^*(E) \Rightarrow A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{A}&\end{aligned}$$

Navíc z poslední série nerovností dostaneme:

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap E) + \mu^*(E \cap (X \backslash A))$$

5. krok: Chceme dokázat, že μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{A}$ (tedy $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ je míra)
Aplikuji poslední rovnost z 4.kroku na $E = A$, tedy $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \mu^*()$
6. krok: Chceme dokázat, že μ^* je úplná míra.
Def (Úplnost jinak): $\forall M \in X,\ \exists\ B, C \in \mathcal{A},\ B \subset M \subset C,\ \mu^*(C \backslash B) = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{A}$ a $\mu^*(M) = \mu^*(B)$
K úplnosti nám stačí dokázat, že $\mu^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$. Nechť $E \subset X$, pak

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \\ &\leq 0 + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \leq \mu^*(E) \\ &\Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \\ &\Rightarrow A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

□

Poznámka: Henclohistorka: 4-rozměrný prostor je n rozměrný, kde $n = 4$

Věta L 7.3 (Test měřitelnosti)**.** *Nechť μ^* je vnější míra generovaná $(\mathcal{T}, \tau)$. Nechť $A \subset X$ a nechť pro každou množinu $T \in \mathcal{T}$ platí $T \cap A \in \mathcal{T}$, $T \cap A^c \in \mathcal{T}$ a $\tau(T) = \tau(T \cap A) + \tau(T \cap A^c)$ (♪). Potom množina A je μ^*-měřitelná.*

Důkaz. Nechť A je jako ve větě (tzn. předpoklady splněny). Nechť $E \subset X$ je libovolná testovací množina. Zvolme $T_k \in \mathcal{T}$ jako v definici vnější míry: $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ .Pak $E \cap A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap T_k)$ a $E \cap (X \backslash A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap (X \backslash T_k))$.
Nyní

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(A \cap T_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k \cap (X \backslash A)) \\ &\overset{♪}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k) \end{aligned}$$

Infimum přes všechna T_k dá:

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \leq \mu^*(E)$$

Což je ta netriviální nerovnost (druhá triviální) a máme $A \in \mathcal{A}$ □

Poznámka: Poloprostor je měřitelný. Pronikneme čtverečky (OBRAZEK) atd. Tedy i pásečky jsou měř (průnik dvou poloprostorů). Tedy i čtverečky. Tedy i všechny otevřený. Tedy všechny borelovsý. Tedy skutečně Lebesgueova míra je míra, je definována na borelovských množinách. Teď už jen potřebujeme dokázat, že míra intervalu je opravdu objem intervalu.

Konec 21. Přednášky

7.2. Konstrukce Lebesgueovy míry

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}^n$. {Polouzavřeným intervalem } rozumíme množinu

$$(a, b] := \Big\{ x \in \mathbf{R}^n :\ a_j < x_j \leq b_j,\ j \in \{1, \ldots, n\} \Big\}.$$

Možinu všech intervalů značíme jako $\mathcal{I}^n$. *Objem* intervalu definujeme jako $\text{vol}(I) = 0$ pro $I = \emptyset$ a jinak jako

$$\text{vol}(I) = \Pi_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Toto je stejné jako definice buňky

Definice. Pro množinu $A \subset \mathbf{R}^n$ definujeme *vnější n-rozměrnou Lebesgueovu míru* množiny A jako

$$\mathcal{L}_n^*(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_n(I_k) :\ I_k \in \mathcal{I}^n,\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big\}.$$

Dle věty 7.2. je $\mathcal{L}_n^*$ vnější míra na nějaké σ-algebře.

Lemma 7.4 (Měřitelnost poloprostoru)**.** *Nechť $k \in \{1, \dots, n\}$, $c \in \mathbf{R}$ a $P_k(c) = \{x \in \mathbf{R}^n :\ x_k > c\}$. Potom $P_k(c)$ je $\mathcal{L}_n^*$ měřitelná množina.*

Důkaz. Podle V 7.3. stačí $A = P_k(c)\ \forall T = (a, b]$. $P_k(c) \cap (a, b] \in \mathcal{I}^n$, $(\mathbb{R}^n \backslash P_k(c)) \cap (a, b] \subset \mathcal{I}^n$ a $\text{vol}() + \text{vol}() \overset{(*)}{=} \text{vol}((a, b])$.
Rozliším 3 případy: OBRAZEK
a) $(a, b] \subset P_k(c) \Rightarrow P_k(c) \cap (a, b] = (a, b]$, $(\mathbb{R}^n \backslash P_k(c)) \cap (a, b] = \emptyset$ a (*) platí.
b) $(a, b] \subset \mathbb{R}^n \backslash P_k(c) \Rightarrow$ analogicky zřejmé
c) Položme $x = [a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n]$ a $y = [b_1, \dots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \dots, b_n]$
Potom:

$$\begin{aligned}
&\text{vol}((a, b] \cap P_k(c)) + \text{vol}((a, b] \cap (\mathbb{R}^n \backslash P_k(c))) = \\
&= \text{vol}((x, b]) + \text{vol}((a, y]) = (b_l - c) \cdot \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (b_j - a_j) + (c - a_k) \cdot \prod_{j=1, j\neq 1}^{n} (b_j - a_j) \\
&= \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \text{vol}((a, b])
\end{aligned}$$

□

Věta L 7.5 (Měřitelnost Borelovských množin)**.** *Každá borelovská množina v $\mathbf{R}^n$ je $\mathcal{L}_n^*$ měřitelná.*

Důkaz. Vždy $\mathcal{L}_n^*$-měřitelné množiny tvoří σalgebru (z V 7.3), tedy stačí ukázat, že otevřené jsou $\mathcal{L}_n^*$ měřitelné. Nechť $G \in \mathbb{R}^n$ otevřená, pak existují $I_k \in \mathcal{I}^n$ tak, že $G = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$
Tedy stačí ukázat, že $\forall (a, b] \in \mathcal{I}^n$, pak $(a, b]$ je $\mathcal{L}_n^*$-měřitelná. OBRAZEK

$$(a, b] = \bigcap_{k=1}^{n} P_k(a - k) \backslash P_k(b_k) \in \mathcal{A}$$

□

Důsledek: Podle V 7.2. je $\mathcal{L}_n^*$ úplná míra, a tedy dokonce každá množina z $\mathcal{B}_o(\mathbb{R}^n)$ (=zúplnění Borelovských množin) je $\mathcal{L}_n^*$-měřitelná.

Věta T 7.6 (Míra intervalů)**.** *Pro $I \in \mathcal{I}^n$ platí $\mathcal{L}_n^*(I) = \mathcal{L}_n(I)$.*

Důkaz. **Připomenutí: Kompaktnost** - K je kompaktní, pak z každého pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí, neboli $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow U_1, \dots, U_j,\ K \subset \bigcup_{k=1}^{j} U_k$.
Dále: $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\iff$ K je omezená a uzavřená

Poznámka: Historka z matfyzu. Nelichoťte slečnám tím, že jsou kompaktní, pokud neznají jiné metrické prostory, než $\mathbb{R}$

Zřejmě $\mathcal{L}_n^*(I) \leq \mathrm{vol}(I)$; $I \subset I \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots$.
K důkazu opačné nerovnosti stačí ($\square$)

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Rightarrow \mathrm{vol}(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k)$$

K tomu stačí ($♪_n$)

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{j} (a_k, b_k) \Rightarrow \mathrm{vol}([a,b]) \leq \sum_{k=1}^{j} \mathrm{vol}((a_k, b_k))$$

Nechť platí ($♪_n$), chceme ($\square$).

$$(a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \Rightarrow [a+\varepsilon, b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k + \varepsilon_k)$$

(tedy jsme si intervaly zvěštili změnšili dle potřeby, inkluze stále platí), kde $\mathrm{vol}(a_k, b_k + \varepsilon_k) \leq \mathrm{vol}((a_k, b_k]) + \frac{\varepsilon}{2^k}$, z čehož společně s kompaktnosti $[a+\varepsilon, b]$ dostáváme $[a+\varepsilon, b] \subset \bigcup_{k=1}^{j} (a_k, b_k + \varepsilon_k)$.
Z toho už díky ($♪_n$) dostaneme

$$\mathrm{vol}([a+\varepsilon, b]) \leq \sum_{k=1}^{j} \mathrm{vol}((a_k, b_k + \varepsilon_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}((a_k, b_k]) + \varepsilon \overset{\varepsilon \to 0^+}{\Rightarrow} (\square)$$

Nyní dokážeme ($♪_n$) indukcí přes n. OBRAZEK
$n = 1$ Zjevné z trojuhelníkové nerovnosti
Nechť $n \geq 1$ a nechť platí ($♪_n$), chceme ($♪_{n+1}$).
Mějme

$$\prod_{i=1}^{n+1} [a_i, b_i] = [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1}, [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{j} (a_k, b_k)$$

Označme $v = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$, tedy $\mathrm{vol}([a,b]) = v \cdot (b_{i+1} - a_{i+1})$
Označme

$$P(i) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_{n+1} > c\}$$

a položme OBRAZEK

$$M = \{c \in [a_{n+1}, b_{n+1}] : (b_{n+1} - c) \cdot v \leq \sum_{k=1}^{j} \mathrm{vol}(P(c) \cap I_k)\}$$

(Vysvětlení - dosadíme za c do množiny a_{n+1} a vyjde nám nerovnost, kterou chceme)
Pokud $a_{n+1} \in M \Rightarrow$ ($♪_{n+1}$) platí. Zjevně $b_{n+1} \in M$ protože dostaneme nulu a ta je menší než cokoliv kladného. Z toho plyne $m := \inf M \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Je lehké ukázat, že $m \in M$ (tedy infimum je defacto minimum - protožy ty funkce definující M jsou spojité funkce proměnné c)
Chceme $m = a_{n+1}$ Nechť $m > a_{n+1}$ OBRAZEK.
Definujme

$$J = \{x \in \mathbb{R}^n : [x_1, \ldots, x_n, m] \in (a_k, b_k)\}$$
$$J_k = \{x \in \mathbb{R}^n : [x_1, \ldots, x_n, m] \in (a_k, b_k)\}$$

Pro každé k je buď $J_k = \emptyset$ nebo $(a_k)_{n+1} < n < (b_k)_{n+1}$ (n+1 souřadnice). Definujme

$$c := \max\{\{a_{n+1}\} \cup \{(a_n)_{n+1} : k \in \{1, \dots, k\}, J_k \neq \emptyset\}\}$$

Pak $c < m$ a $\forall k$: $J_k \neq \emptyset$ Pak platí

$$\mathrm{vol}(I_k \cap P(c)) = \mathrm{vol}(I_k \cap P(m)) + (m - c)\mathrm{vol}(J_k) \qquad (\triangle)$$

OBRAZEK

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{j} I_k \Rightarrow J \subset \bigcup_{k=1}^{j} J_k \overset{\text{♪}_n}{\Rightarrow} \mathrm{vol}(J) \leq \sum_{k=1, J_k \neq \emptyset}^{j} \mathrm{vol}(J_k)$$

Nyní

$$\begin{aligned}(b_{n+1} - c) \cdot v &= (b_{n+1} - m) \cdot v + (m - c) \cdot v \\ &\overset{m \in M}{\leq} \sum_{k=1}^{j} \mathrm{vol}(P(m) \cap I_k) + (m - c) \sum_{k=1, J_k \neq \emptyset}^{j} \mathrm{vol}(J_k) \\ &\overset{(\triangle)}{\leq} \sum_{k=1}^{j} \mathrm{vol}(P(c) \cap I_k)\end{aligned}$$

Tedy $c \in M$, tj. spor s $m = \inf M$ a $c < m$.

□

Konec 22. Přednášky

Lemma 7.7. *Nechť $c \in \mathbf{R}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a $H_j(c) = \{x \in \mathbf{R}^n : \ x_j = c\}$. Potom $\mathcal{L}_n^*(H_j(c)) = 0$.*

Důkaz. BÚNO $c = 0$ a $j = 1$, nechť $\varepsilon > 0$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(- \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{k^{n-1}}, \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{k^{n-1}} \Big] (-k, k]^{n-1}$$

Podle definice $\mathcal{L}_n^*(H_1(0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{k^{n-1}} (2k)^{n-1} = 4\varepsilon \cdot 2^{n-1}$ □

Věta L 7.8 (Existence Lebesgueovy míry)**.** *Na $\mathbf{R}^n$ existuje právě jedna úplná míra taková, že $\mathcal{L}_n$ přiřazuje každému intervalu z $\mathcal{I}^n$ jeho objem a všechny borelovské množiny jsou měřitelné. Míra $\mathcal{L}_n$ je invariantní vůči posunutí.*

Důkaz.
- Podle V 7.1 je $\mathcal{L}_n^*$ vnější míra
- Podle V 7.2. je to úplná míra na nějaké σ-algebře a
- označme $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n^*|_{\mathcal{A}}$
- Podle V 7.6 a L 7.7. přiřazuje každému intervalu jeho objem
- Podle V 7.5. jsou Borelovské množiny měřitelné
- Jednoznačnost plyne z V 4.4
- Invariance vůči posunutí je jednoduchá:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Rightarrow (x + A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (x + I_k)$$

□

7.3. Pramíra a Hopfova věta

Definice. Nechť X je množina a $\mathcal{R} \subset \exp(X)$. Říkáme, že $\mathcal{R}$ je *algebra* (na X), jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$,

(ii) pro každou množinu $R \in \mathcal{R}$ je $R^c \in \mathcal{R}$,

(iii) jsou-li $R_1, \ldots, R_k \in \mathcal{R}$, potom $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \in \mathcal{R}$.

Definice. Je-li $\mathcal{R}$ algebra na X, pak funkce $\varrho : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ se nazývá *pramíra*, jestliže

(i) $\varrho(\emptyset) = 0$,

(ii) je-li $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{R}$ a $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R_k \in \mathcal{R}$,

potom $\varrho\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varrho(R_k)$.

Věta L 7.9 (Hopfova věta)**.** *Nechť $\mathcal{R} \subset \exp(X)$ je algebra, ϱ je pramíra na $\mathcal{R}$ a $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$. Potom existuje míra μ na $\mathcal{A}$ taková, že $\mu|_{\mathcal{R}} = \varrho$.*

Jestliže existuje posloupnost $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ množin z $\mathcal{R}$ taková, že $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ a $\varrho(R_k) < \infty$, $k \in \mathbf{N}$, a ν je míra na $\mathcal{A}$, pro niž $\nu|_{\mathcal{R}} = \varrho$, potom $\nu = \mu$.

Důkaz. Aplikujeme V 7.1. na $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ a $\mathcal{T} = \varrho$
Podle V 7.2. máme míru na nějaké σ-algebře a $\mu = \varrho^*|_{\mathcal{A}}$. $\sigma(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ k tomu stačí $\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$
Použijme V 7.3. Nechť $A \in \mathbb{R}$ chceme $\forall T \in \mathbb{R} : A \cap T \in \mathbb{R}$ a $(X \backslash A) \cap T \in \mathbb{R}$ (tedy, že $\mathbb{R}$ je uzavřená na komplementy a sjednocení $\Rightarrow$ uzavřenost na průniky)
A chceme $\varrho(T) = \varrho(T \cap A) + \varrho(T \cap (X \backslash A))$.
Definice pramíry (ii) dá potřebné. Tedy $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathcal{A}$
Jednoznačnost plyne z V 4.4. neboť algebra $\mathbb{R}$ je uzavřená na průniky dvou množin.
Zbývá: $\forall R \in \mathbb{R} : \varrho^*(R) = \varrho(R)$ $(\varrho^*(R) = \inf\{\sum \varrho(R_k) : R \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k, R_k \in \mathbb{R}\})$
Zřejmě je $\varrho^*(R) \leq \varrho(R)$
Pro opačnou nerovnost stačí $R \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k, R_k \in \mathbb{R}$, pak $\varrho(R) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varrho(R_k)$
R_k můžeme standardně zdisjunktnit: $\exists A_k \in \mathbb{R}, A_k \subset R_k, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$
Nyní $R \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \Rightarrow R \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow R = \bigcup_{k=1}^{\infty} (R \cap A_k)$
Podle definice pramíry (ii): $\varrho(R) = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho(R \cap A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varrho A_k \leq \sum_{\varrho=1}^{\infty} (R_k)$ $\square$

Poznámka: a) Pomocí této věty lze ekvivalentně zavést $\mathcal{L}_n$
b) Význam v teorii pravděpodobnosti - na zavedení distribuční funkce více proměnných
Příklad: Konstrukce neměřitelné množiny