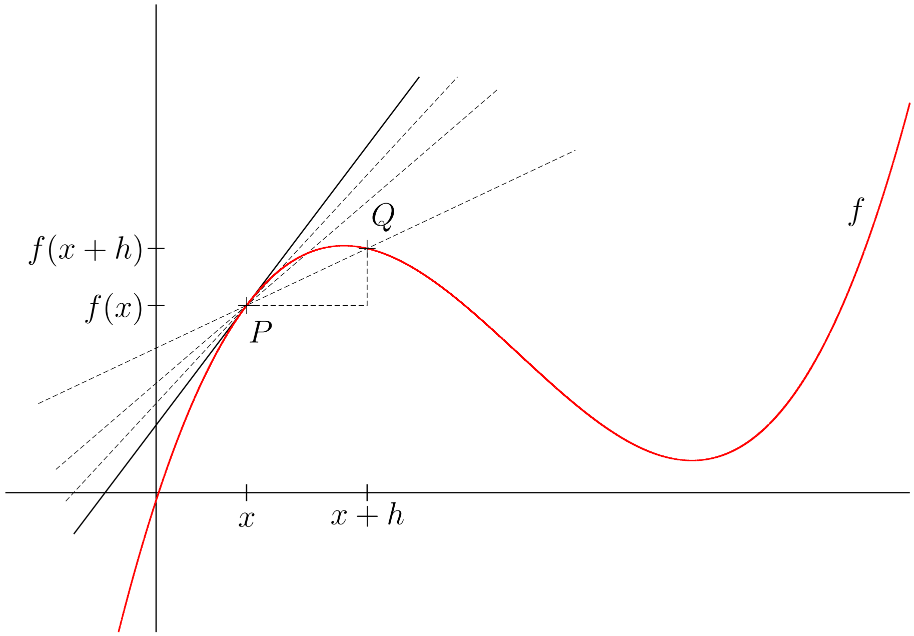
# Derivácia funkcie

Majme funkciu $f$, ktorá je spojitá na istom intervale a jej graf na tomto intervale vyzerá takto:




Obrázok 1: Graf funkcie $f$.

Na tomto grafe si zvolíme body $P[x; f(x)]$ a $Q[x+h; f(x+h)]$. Priamka $\overleftrightarrow{PQ}$ je teraz sečnicou krivky $f$. Keď sa bod $Q$ po tejto krivke približuje k bodu $P$ ($h$ sa približuje k nule), priamka $\overleftrightarrow{PQ}$ pretína čoraz menšiu časť grafu. Keby bol bod $Q$ neobmedzene blízko bodu $P$, priamka $\overleftrightarrow{PQ}$ by prechádzala iba cez jeden bod krivky (v tomto okolí) a stala by sa dotyčnicou krivky $f$ v bode $P$.

Uhol priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ a osi $x$ označme $\alpha$ (ten uhol, ktorého vnútorné body sú nahor od $x$ a napravo od $\overleftrightarrow{PQ}$). Z pravouhlého trojuholníka platí, že pre smernicu priamky $\overleftrightarrow{PQ}$, teda hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$, platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

V prípade dotyčnice by muselo platiť $h = 0$ a preto by výraz (1) nemal zmysel. Z grafu je však vidieť, že dotyčnica existuje, vieme si ju predstaviť.

Aká má byť teda jej smernica? $h$ sa nesmie rovnať 0, môže sa k nej však limitne približovať. Smernica dotyčnice je preto definovaná ako $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Táto limita má pre každé $x$ z intervalu istú hodnotu, pretože, ako vidieť z grafu[1], dotyčnica existuje v každom z bodov na krivke. Máme teda množinu limít, ktorú chápeme ako ďalšiu funkciu, $g(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Túto funkciu nazývame derivácia funkcie $f$ a danú limitu nazývame derivácia funkcie $f$ v bode $x$. (Limita je teda funkčnou hodnotou derivácie v bode $x$ – konkrétnym číslom.)[2]

**Def.:** Funkciu

$$f'\colon y=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nazývame derivácia funkcie $f$.

Ak limita v danom bode neexistuje, hovoríme, že funkcia je v danom bode nederivovateľná.

**Ozn.:** Existuje viac druhov značenia derivácie, najčastejšie sa používajú:

- $f', g'$, ale aj samotného predpisu funkcie, napr. $(x^3)'$,
- $\frac{df}{dx}$, $\frac{dg}{dx}$, vychádza z $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ – derivácia je vlastne pomer zmeny závislej premennej a zmeny nezávislej premennej, pričom táto zmena sa limitne blíži k nule. Písmeno $d$ označuje túto nekonečne malú – infinitezimálnu zmenu, ktorú nazývame diferenciál.

**Využitie** Pojem derivácie je základom infinitezimálneho počtu a matematickej analýzy, ktorej vývoj a použitie má dôsledky pre takmer všetky aspekty moderného sveta. Je používaná takmer vo všetkých vedách, najmä vo fyzike. Rôzne stavebné techniky, letectvo a iné technológie používajú infinitezimálny počet v základoch. Fyzikálny význam derivácie možno jednoducho pochopiť z nasledujúceho príkladu: Auto mení svoju vzdialenosť od pozorovateľa v závislosti od času funkciou $s(t)$ (vzdialenosť $s$ v čase $t$). Okamžitá rýchlosť auta v čase $t$ je definovaná ako

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t},$$

čo je vlastne derivácia funkcie vzdialenosti.

[1] Nakresliť niekoľko smerníc do grafu.

[2] Je potrebné chápať rozdiel medzi deriváciou, čo je ďalšia funkcia, a deriváciou v bode, čo je hodnota tejto funkcie v konkrétnom bode.

**Príklad** Graficky (pomocou dotyčnice ku grafu) určte deriváciu funkcie $y = 1$ v bode 1, $x$.

**Príklad** Graficky určte deriváciu funkcie $y = ax$ v bode 1, $x$.

**Príklad** Graficky určte deriváciu funkcie cos v bode 0, sin v bode $\frac{3}{2}\pi$.

## Pravidlá na výpočet derivácie

Aby sme zakaždým, keď chceme určiť deriváciu, nemuseli počítať limitu, existujú pravidlá, podľa ktorých sa dá nájsť funkčný predpis derivácie. Tieto pravidlá samotné sú odvodené pomocou limít.

**Veta** Derivácia súčtu (rozdielu) sa rovná súčtu (rozdielu) derivácii:

$$\begin{aligned} (f \pm g)' &= f' \pm g', \\ (f \pm g \pm \cdots)' &= f' \pm g' \pm \cdots , \end{aligned}$$

**Veta** Derivácia súčinu sa rovná súčtu súčinov vstupných činiteľov, pričom postupne v každom sčítanci jedného činiteľa nahradíme jeho deriváciou:

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg', \\ (fg \cdots z)' &= f'g \cdots z + fg' \cdots z + \cdots + fg \cdots z'. \end{aligned}$$

**Veta** Derivácia súčinu konštanty a funkcie sa rovná súčinu tejto konštanty a derivácie funkcie:

$$(cf)' = cf', \quad c = \text{konšt.}$$

**Veta** Pre deriváciu podielu platí:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0.$$

**Veta** Derivácia mocniny premennej, podľa ktore derivujeme, sa rovná súčinu exponenta a mocniny o jednu nižšej:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \\ (x^n)' &= nx^{n-1}, \quad x > 0, n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Veta** Pre deriváciu zloženej funkcie platí:

$$(f(g(x)))' = f'(g)g'(x).$$

**Príklad** Určte deriváciu funkcie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5$.

**Príklad** Určte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$