Zadanie

Športovec hádže guľu rukou, ktorá je v okamihu hodenia vo výške 2 m nad zemou, začiatočnou rýchlosťou 13 $m \cdot s^{-1}$ pod uhlom 45°. Ukážte, že takýmto spôsobom nie je možné dosiahnuť najlepší výkon (tj. aby bolo miesto dopadu čo najďalej) a určte, pod akým uhlom má hádzať, aby ho dosiahol. ($g = 10\ m \cdot s^{-2}$)

Riešenie

Vieme, že pri vystrelení strely dosiahne strela najväčšiu vzdialenosť, ak je vystrelená pod uhlom 45°. To však platí iba vtedy, ak je bod dopadu v rovnakej výške, ako bod výstrelu. V tejto úlohe je to neaplikovateľné.

Pohyb gule (ďalej hmotného bodu) v tejto úlohe môžeme chápať ako pokračovanie výstrelu pod uhlom β so začiatočnou rýchlosťou u z nulovej výšky, ktorý už trvá nejaký čas t_0, hmotný bod je teraz vo výške h, jeho priemet prešiel na horizontálnej zložke vzdialenosť l_0, veľkosť jeho okamžitej rýchlosti je v a jej vektor zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha < \beta$.

Hmotný bod sa dostane do maximálnej výšky H za čas t_1, za ktorý gravitačné zrýchlenie zmenší vertikálnu zložku jeho rýchlosti na nulovú.

$$t_1 = \frac{v \sin\alpha}{g}$$

Maximálna výška H, do ktorej sa hmotný bod dostane

$$H = h + vt_1 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt_1^2$$

Z tejto hodnoty vypočítame čas t_2, za ktorý sa hmotný bod dostane späť na zem

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}gt_2^2 \\
t_2 &= \sqrt{\frac{2H}{g}} \\
&= \sqrt{\frac{2h + 2vt_1 \sin\alpha - gt_1^2}{g}} \\
&= \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{2v\frac{v\sin\alpha}{g}\sin\alpha}{g} - \left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{2h}{g} + 2\frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2} - \frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2}}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g^2}}$$

Vzdialenosť l, do ktorej sa hmotný bod dostane

$$\begin{aligned} l &= v \cos\alpha \, (t_1 + t_2) \\ &= v \cos\alpha \left(\frac{v \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \right) \end{aligned}$$

Keďže začiatočná rýchlosť v, výška h a gravitačné zrýchlenie g sú známe, vzdialenosť l je funkciou uhla α. Preto je našou úlohou nájsť lokálne maximum funkcie $l(\alpha)$ v intervale $\langle 0°, 90° \rangle$.

Na hľadanie lokálnych extrémov funkcie (lokálnych miním a lokálnych maxím) sa používa poznatok z matematickej analýzy, ktorý hovorí, že funkčná hodnota derivácie spojitej reálnej funkcie reálnej premennej nadobúda nulové body v lokálnych extrémoch a inflexných bodoch tejto funkcie. Hľadáme preto nulové body derivácie funkcie $l(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\alpha} &= \frac{v^2}{g} \cos 2\alpha + \frac{v^3 \sin\alpha \cos^2 \alpha}{g^2 \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g^2}}} - v \sin\alpha \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \\ 0 &= \frac{v^2}{g} \cos 2\alpha_m + \frac{v^3 \sin\alpha_m \cos^2 \alpha_m}{g^2 \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2 \sin^2 \alpha_m}{g^2}}} - v \sin\alpha_m \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2 \sin^2 \alpha_m}{g^2}} \end{aligned}$$

Po úpravách dostaneme

$$\cos^2 \alpha_m = \frac{2hg + v^2}{2(hg + v^2)}$$

Keďže pre $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$ platí $\cos\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \cos\alpha_m &= \sqrt{\frac{2hg + v^2}{2(hg + v^2)}} \\ \alpha_m &= \cos^{-1} \sqrt{\frac{2hg + v^2}{2(hg + v^2)}} \end{aligned}$$

Našli sme jedinú hodnotu, v ktorej je derivácia nulová. Z typu pohybu vyplíva, že funkcia je pre $\alpha < \alpha_0$ stúpajúca a pre $\alpha > \alpha_0$ klesajúca, preto je v bode α_0 funkčné maximum.

Po dosadení hodnôt dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha_m &\doteq 41°57'46'' \\ l(\alpha_m) &\doteq 18{,}7939 \ m \end{aligned}$$

Záver

Športovec dosiahne najlepší výkon pri hádzaní pod uhlom $41°57'46''$, a to 18,7939 m. (Údaje sú zaokrúhlené.)